

● 수학 영역 ●

수학 정답

1	④	2	④	3	③	4	②	5	②
6	①	7	③	8	③	9	⑤	10	①
11	④	12	②	13	①	14	⑤	15	⑤
16	10	17	20	18	18	19	7	20	2
21	84	22	108						

해설

1. [출제의도] 로그의 정의를 이용하여 진수를 구한다.

$$\log_3 x = 3 \text{ 이므로 } x = 3^3 = 27$$

2. [출제의도] 정적분의 값을 계산한다.

$$\begin{aligned} \int_0^3 (x+1)^2 dx &= \int_0^3 (x^2 + 2x + 1) dx \\ &= \left[\frac{1}{3}x^3 + x^2 + x \right]_0^3 = 21 \end{aligned}$$

3. [출제의도] 삼각함수의 주기를 이해한다.

$$\tan\left(\pi x + \frac{\pi}{2}\right) = \tan\left(\pi x + \frac{\pi}{2} + \pi\right) = \tan\left(\pi(x+1) + \frac{\pi}{2}\right)$$

따라서 함수 $y = \tan\left(\pi x + \frac{\pi}{2}\right)$ 의 주기는 1

4. [출제의도] 등차수열의 합과 일반항 사이의 관계를 이해한다.

등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라 하면 $S_1 = 1^2 - 5 \times 1 = -4$, $S_2 = 2^2 - 5 \times 2 = -6$
 그러므로 $a_2 = S_2 - S_1 = -6 - (-4) = -2$
 따라서 $a_1 + d = a_2 = -2$

5. [출제의도] 함수의 연속에 대한 성질을 이해한다.

함수 $(x^2 + ax + b)f(x)$ 가 $x=1$ 에서 연속이므로

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} (x^2 + ax + b)f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x^2 + ax + b)f(x)$$

그래프에서 $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 1$, $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 3$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} (x^2 + ax + b)f(x) = (1 + a + b) \times 1 = 1 + a + b,$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} (x^2 + ax + b)f(x) = (1 + a + b) \times 3 = 3(1 + a + b)$$

에서 $1 + a + b = 3(1 + a + b)$

따라서 $a + b = -1$

6. [출제의도] 지수에 미지수를 포함한 방정식을 푼다.

정사각형의 한 변의 길이가 1이므로

$$6^{-a} - 6^{-a-1} = 1, \quad 6^{-a} - \frac{6^{-a}}{6} = 1, \quad \left(1 - \frac{1}{6}\right) \times 6^{-a} = 1$$

따라서 $6^{-a} = \frac{6}{5}$

7. [출제의도] 미분가능성을 이해하여 함숫값을 구한다.

$$f(x)g(x) = \begin{cases} -(x+3)(2x+a) & (x < -3) \\ (x+3)(2x+a) & (x \geq -3) \end{cases}$$

함수 $f(x)g(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로 $x = -3$ 에서 미분가능하다. 즉,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -3^-} \frac{f(x)g(x) - f(-3)g(-3)}{x+3} \\ = \lim_{x \rightarrow -3^+} \frac{f(x)g(x) - f(-3)g(-3)}{x+3}, \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow -3^-} (-2x - a) = \lim_{x \rightarrow -3^+} (2x + a)$$

따라서 $6 - a = -6 + a$ 에서 $a = 6$

8. [출제의도] 로그함수를 활용하여 문제를 해결한다.

점 P는 두 곡선 $y = \log_2(-x+k)$, $y = -\log_2 x$ 의 교점

이므로 $\log_2(-x_1+k) = -\log_2 x_1$, $-x_1+k = \frac{1}{x_1}$

즉, $x_1^2 - kx_1 + 1 = 0 \dots\dots \textcircled{1}$

점 R는 두 곡선 $y = -\log_2(-x+k)$, $y = \log_2 x$ 의 교점

이므로 $-\log_2(-x_3+k) = \log_2 x_3$, $\frac{1}{-x_3+k} = x_3$

즉, $x_3^2 - kx_3 + 1 = 0 \dots\dots \textcircled{2}$

①, ②에 의해 x_1 , x_3 은 이차방정식 $x^2 - kx + 1 = 0$ 의 서로 다른 두 실근이다.

이차방정식의 근과 계수의 관계에서 $x_1 x_3 = 1$

그러므로 $x_3 - x_1 = 2\sqrt{3}$ 에서

$$(x_1 + x_3)^2 = (x_3 - x_1)^2 + 4x_1 x_3 = (2\sqrt{3})^2 + 4 \times 1 = 16$$

따라서 $x_1 + x_3 = 4$

9. [출제의도] 수열의 귀납적 정의를 이용하여 수열의 합을 구한다.

자연수 k 에 대하여

(i) $n = 2k - 1$ 일 때, $a_{2k-1} + a_{2k} = 2(2k-1) = 4k - 2$

$$\begin{aligned} \text{이므로 } \sum_{n=1}^{22} a_n &= \sum_{k=1}^{11} (a_{2k-1} + a_{2k}) = \sum_{k=1}^{11} (4k - 2) \\ &= 4 \times \frac{11 \times 12}{2} - 2 \times 11 = 242 \end{aligned}$$

(ii) $n = 2k$ 일 때, $a_{2k} + a_{2k+1} = 2 \times 2k = 4k$

$$\begin{aligned} \text{이므로 } \sum_{n=2}^{21} a_n &= \sum_{k=1}^{10} (a_{2k} + a_{2k+1}) = \sum_{k=1}^{10} 4k \\ &= 4 \times \frac{10 \times 11}{2} = 220 \end{aligned}$$

따라서 $a_1 + a_{22} = \sum_{n=1}^{22} a_n - \sum_{n=2}^{21} a_n = 242 - 220 = 22$

[다른 풀이]

자연수 k 에 대하여 $a_{2k} + a_{2k+1} = 4k$, $a_{2k-1} + a_{2k} = 4k - 2$

이므로 $a_{2k+1} - a_{2k-1} = 2$

즉, 수열 $\{a_{2k-1}\}$ 은 공차가 2인 등차수열이다.

그러므로 $a_{2k-1} = a_1 + (k-1) \times 2 \dots\dots \textcircled{1}$

①에 $k=11$ 을 대입하면 $a_{21} = a_1 + 20 \dots\dots \textcircled{2}$

모든 자연수 n 에 대하여 $a_n + a_{n+1} = 2n$ 이므로

$n=21$ 을 대입하면 $a_{21} + a_{22} = 42 \dots\dots \textcircled{3}$

②을 ③에 대입하면 $(a_1 + 20) + a_{22} = 42$

따라서 $a_1 + a_{22} = 22$

10. [출제의도] 함수의 그래프를 이해하여 함숫값을 구한다.

함수 $g(x)$ 는 $x=a$ 에서 미분가능하고 $g(a)=0$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow a^-} \frac{g(x)}{x-a} = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{g(x)}{x-a},$$

$$\lim_{x \rightarrow a^-} \frac{|(x-a)f(x)|}{x-a} = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{|(x-a)f(x)|}{x-a},$$

$$\lim_{x \rightarrow a^-} \frac{-(x-a)|f(x)|}{x-a} = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{(x-a)|f(x)|}{x-a}$$

그러므로 $-|f(a)| = |f(a)|$ 에서 $f(a) = 0$

$f(x) = (x-a)(x-k)$ (k 는 상수)라 하면

함수 $g(x) = |(x-a)^2(x-k)|$ 가 $x=3$ 에서만 미분가능하지 않으므로 $k=3$ 이다.

그러므로 $g(x) = |(x-a)^2(x-3)|$

$h(x) = (x-a)^2(x-3)$ 이라 하면

$a < 3$ 이고 함수 $g(x)$ 의 극댓값이 32이므로 함수 $h(x)$ 의 극솟값은 -32 이다.

$$h'(x) = 2(x-a)(x-3) + (x-a)^2 = (x-a)(3x-6-a) = 0$$

함수 $h(x)$ 는 $x = \frac{6+a}{3}$ 에서 극솟값 -32 를 갖는다.

$$h\left(\frac{6+a}{3}\right) = \left(\frac{6+a}{3} - a\right)^2 \left(\frac{6+a}{3} - 3\right) = -4\left(1 - \frac{a}{3}\right)^3 = -32$$

$$\left(1 - \frac{a}{3}\right)^3 = 8 \text{ 이므로 } 1 - \frac{a}{3} = 2 \text{ 에서 } a = -3$$

따라서 $f(x) = (x+3)(x-3)$ 에서 $f(4) = 7$

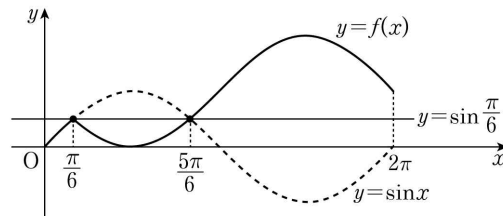
11. [출제의도] 삼각함수의 그래프를 이해하여 문제를 해결한다.

그림은 k 의 값에 따른 두 곡선 $y=f(x)$, $y=\sin x$ 와

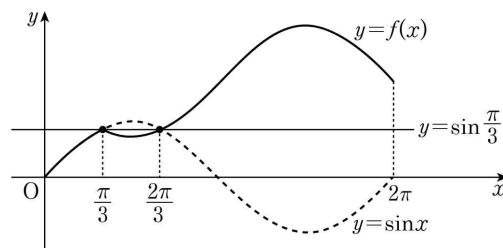
직선 $y=\sin\left(\frac{k}{6}\pi\right)$ 를 좌표평면에 나타낸 것이다.

각 그림에서 곡선 $y=f(x)$ 와 직선 $y=\sin\left(\frac{k}{6}\pi\right)$ 의 교점의 개수 a_k 를 구하면 다음과 같다.

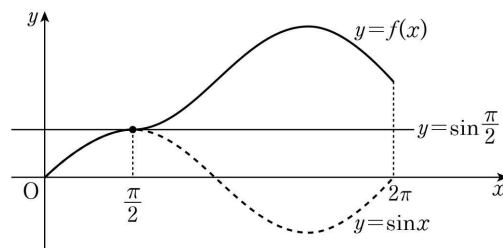
(i) $k=1$ 일 때, $a_1=2$



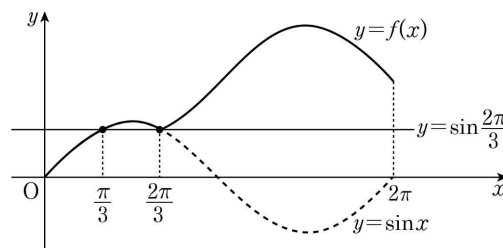
(ii) $k=2$ 일 때, $a_2=2$



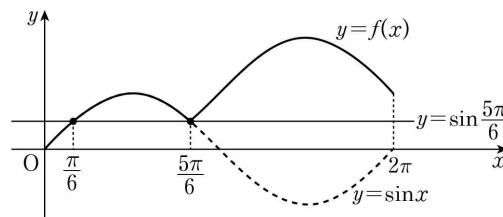
(iii) $k=3$ 일 때, $a_3=1$



(iv) $k=4$ 일 때, $a_4=2$



(v) $k=5$ 일 때, $a_5=2$



따라서 $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 2 + 2 + 1 + 2 + 2 = 9$

[다른 풀이]

곡선 $y=f(x)$ 와 직선 $y=\sin\left(\frac{k}{6}\pi\right)$ 의 교점의 개수는

방정식 $f(x) = \sin\left(\frac{k}{6}\pi\right)$ 의 서로 다른 실근의 개수와 같다. 즉,

(i) $0 \leq x \leq \frac{k}{6}\pi$ 일 때, $\sin x = \sin\left(\frac{k}{6}\pi\right)$

(ii) $\frac{k}{6}\pi < x \leq 2\pi$ 일 때,

$$2\sin\left(\frac{k}{6}\pi\right) - \sin x = \sin\left(\frac{k}{6}\pi\right) \text{ 에서 } \sin x = \sin\left(\frac{k}{6}\pi\right)$$

그러므로 교점의 개수는 구간 $[0, 2\pi]$ 에서 방정식

$\sin x = \sin\left(\frac{k}{6}\pi\right)$ 의 서로 다른 실근의 개수와 같다.

$k=1$, $k=5$ 일 때, $\sin\left(\frac{k}{6}\pi\right) = \frac{1}{2}$ 이므로 $\sin x = \frac{1}{2}$ 의 서로 다른 실근의 개수는 각각 2이다.

$k=2$, $k=4$ 일 때, $\sin\left(\frac{k}{6}\pi\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ 이므로 $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

의 서로 다른 실근의 개수는 각각 2이다.

$k=3$ 일 때, $\sin\left(\frac{k}{6}\pi\right) = 1$ 이므로 $\sin x = 1$ 의 서로 다른 실근의 개수는 1이다.

따라서 $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 2 + 2 + 1 + 2 + 2 = 9$

21. [출제의도] 코사인법칙을 이용하여 문제를 해결한다.

호 BD와 호 DC에 대한 원주각의 크기가 같으므로 $\angle CBD = \angle CAD = \angle DAB = \angle DCB$ 이다. 즉, $\overline{BD} = \overline{DC}$ $\overline{BD} = \overline{DC} = a$, $\overline{AD} = b$, $\angle CAD = \theta$ 라 하면 $\angle DAB = \theta$ 이고 $\overline{BD}^2 = \overline{DC}^2$ 이므로 삼각형 DAB와 삼각형 CAD에 각각 코사인법칙을 적용하면 $6^2 + b^2 - 2 \times 6 \times b \times \cos \theta = b^2 + 8^2 - 2 \times b \times 8 \times \cos \theta$, $4b \cos \theta = 28$ 이므로 직각삼각형 ADE에서 $k = b \cos \theta = 7$ 따라서 $12k = 84$

22. [출제의도] 함수의 극값을 이용하여 문제를 해결한다.

조건 (가)에서 $x \neq 0$, $x \neq 2$ 일 때, $g(x) = \frac{x(x-2)}{|x(x-2)|} (|f(x)| - a)$ $x < 0$ 또는 $x > 2$ 일 때, $x(x-2) > 0$ 이고 $0 < x < 2$ 일 때, $x(x-2) < 0$ 이므로 $g(x) = \begin{cases} |f(x)| - a & (x < 0 \text{ 또는 } x > 2) \\ a - |f(x)| & (0 < x < 2) \end{cases}$ 조건 (나)에 의해 함수 $g(x)$ 는 $x=0$, $x=2$ 에서 미분 가능하므로 $x=0$, $x=2$ 에서 연속이다. 즉, $\lim_{x \rightarrow 0-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0+} g(x)$ 에서 $|f(0)| - a = a - |f(0)|$ 그러므로 $|f(0)| = a$ 에서 $g(0) = \lim_{x \rightarrow 0+} g(x) = 0$ 같은 방법으로 $|f(2)| = a$ 에서 $g(2) = 0$ 그러므로 $g(x) = \begin{cases} |f(x)| - a & (x < 0 \text{ 또는 } x > 2) \\ a - |f(x)| & (0 \leq x \leq 2) \end{cases}$ 함수 $g(x)$ 가 $x=0$ 에서 미분가능하므로 $\lim_{x \rightarrow 0-} \frac{g(x) - g(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{g(x) - g(0)}{x}$ 즉, $\lim_{x \rightarrow 0-} \frac{|f(x)| - a}{x} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{a - |f(x)|}{x}$ ㉠ (i) $f(0) = a$ 인 경우 $f(x)$ 는 $x=0$ 에서 연속이고 $f(0) > 0$ 이므로 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) > 0$ 이다. 그러므로 $\lim_{x \rightarrow 0-} \frac{|f(x)| - a}{x} = \lim_{x \rightarrow 0-} \frac{f(x) - f(0)}{x} = f'(0)$, $\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{a - |f(x)|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{f(0) - f(x)}{x} = -f'(0)$ ㉡에서 $f'(0) = -f'(0)$, $f'(0) = 0$ (ii) $f(0) = -a$ 인 경우 $f(x)$ 는 $x=0$ 에서 연속이고 $f(0) < 0$ 이므로 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) < 0$ 이다. 그러므로 $\lim_{x \rightarrow 0-} \frac{|f(x)| - a}{x} = \lim_{x \rightarrow 0-} \frac{-f(x) + f(0)}{x} = -f'(0)$, $\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{a - |f(x)|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{-f(0) + f(x)}{x} = f'(0)$ ㉢에서 $-f'(0) = f'(0)$, $f'(0) = 0$ (i), (ii)에 의해 $f'(0) = 0$ 이다. 함수 $g(x)$ 가 $x=2$ 에서도 미분가능하므로 같은 방법으로 $f'(2) = 0$ 이다. 그러므로 삼차함수 $f(x)$ 는 $x=0$ 과 $x=2$ 에서 극값을 갖고 최고차항의 계수가 1이므로 $x=0$ 에서 극댓값 $f(0) = a$, $x=2$ 에서 극솟값 $f(2) = -a$ 를 갖는다. $f(x) = x^3 + px^2 + qx + a$ (p, q 는 상수)라 하면 $f'(x) = 3x^2 + 2px + q$ 이고 $f'(0) = f'(2) = 0$ 이므로 $p = -3$, $q = 0$ 이다. 즉, $f(x) = x^3 - 3x^2 + a$ $f(2) = 2^3 - 3 \times 2^2 + a = -a$ 이므로 $a = 2$ 따라서 $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$ 이므로 $g(3a) = g(6) = |f(6)| - 2 = |6^3 - 3 \times 6^2 + 2| - 2 = 108$ [참고] [1] $f(0) = f(2) = a$ 또는 $f(0) = f(2) = -a$ 인 경우 삼차함수 $f(x)$ 는 극댓값과 극솟값이 서로 같을 수 없으므로 모순이다. [2] $f(0) = -a$, $f(2) = a$ 인 경우 삼차함수 $f(x)$ 의 최고차항의 계수가 1이므로 모순이다.

[확률과 통계]									
23	㉠	24	㉡	25	㉢	26	㉤	27	㉥
28	㉦	29	150	30	23				

23. [출제의도] 이항분포를 따르는 확률변수의 평균을 계산한다.

이항분포 $B\left(60, \frac{5}{12}\right)$ 를 따르는 확률변수 X 의 평균은 $E(X) = 60 \times \frac{5}{12} = 25$

24. [출제의도] 확률의 덧셈정리를 이해하여 사건의 확률을 구한다.

$P(A) = \frac{1}{3}$ 이므로 $P(A^C) = 1 - P(A) = \frac{2}{3}$ $P(A^C)P(B) = \frac{2}{3} \times P(B) = \frac{1}{6}$ 에서 $P(B) = \frac{1}{4}$ 두 사건 A 와 B 가 서로 배반사건이므로 $P(A \cup B) = P(A) + P(B) = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{7}{12}$

25. [출제의도] 중복조합의 수를 이용하여 경우의 수를 구한다.

A와 B에게 각각 공책을 2권씩 먼저 나누어 준 후 남은 6권의 공책을 4명의 학생에게 남김없이 나누어 주는 경우의 수는 서로 다른 4개에서 6개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로 ${}_4H_6 = {}_{4+6-1}C_6 = {}_9C_6 = {}_9C_3 = \frac{9 \times 8 \times 7}{3 \times 2 \times 1} = 84$

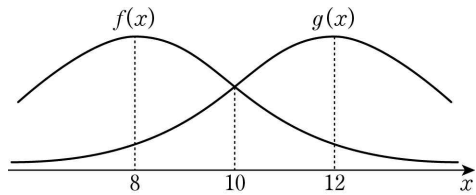
26. [출제의도] 여사건의 확률을 구한다.

한 개의 주사위를 두 번 던져서 나오는 경우의 수는 $6 \times 6 = 36$ 두 수 a, b 의 최대공약수가 홀수인 사건을 A 라 하면 A 의 여사건 A^C 은 a, b 의 최대공약수가 짝수인 사건이다. a, b 의 최대공약수가 짝수이면 a, b 모두 짝수이므로 이 경우의 수는 $3 \times 3 = 9$ 이다. 따라서 $P(A^C) = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$ 이므로 구하는 확률은 $P(A) = 1 - P(A^C) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

27. [출제의도] 정규분포의 성질을 이용하여 확률을 구하는 문제를 해결한다.

두 확률변수 X 와 Y 는 모두 정규분포를 따르고 표준편차가 같으므로 함수 $y = f(x)$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 4만큼 평행이동하면 함수 $y = g(x)$ 의 그래프와 일치한다. 따라서 $g(x) = f(x - 4)$ 이다. 두 함수 $y = f(x)$, $y = g(x)$ 의 그래프가 만나는 점의 x 좌표가 a 이므로 $f(a) = g(a) = f(a - 4)$ $y = f(x)$ 의 그래프는 직선 $x = 8$ 에 대하여 대칭이므로 $\frac{a + (a - 4)}{2} = 8$ $a = 10$ $P(8 \leq Y \leq a) = P(8 \leq Y \leq 10)$ $= P\left(\frac{8 - 12}{2} \leq Z \leq \frac{10 - 12}{2}\right)$ $= P(-2 \leq Z \leq -1)$ $= P(1 \leq Z \leq 2)$ $= P(0 \leq Z \leq 2) - P(0 \leq Z \leq 1)$ $= 0.4772 - 0.3413$ $= 0.1359$

[참고]



28. [출제의도] 조건부확률을 구하는 문제를 해결한다.

선택한 함수 f 가 4 이하의 모든 자연수 n 에 대하여 $f(2n - 1) < f(2n)$ 인 사건을 A , $f(1) = f(5)$ 인 사건을 B 라 하면 구하는 확률은 $P(B|A)$ 이다. X 에서 X 로의 모든 함수의 개수는 8^8 이다. 4 이하의 자연수 n 에 대하여 $f(2n - 1) < f(2n)$ 인 $f(2n - 1)$ 과 $f(2n)$ 을 정하는 경우의 수는 ${}_8C_2 = \frac{8 \times 7}{2 \times 1} = 28$ 4 이하의 모든 자연수 n 에 대하여 $f(2n - 1) < f(2n)$ 인 경우의 수는 28^4 이므로 $P(A) = \frac{28^4}{8^8}$ (i) $f(1) = f(5)$, $f(2) = f(6)$ 인 경우 $f(1) = f(5) < f(2) = f(6)$ 이므로 $f(1)$, $f(2)$, $f(5)$, $f(6)$ 을 정하는 경우의 수는 ${}_8C_2$ 이고, $f(3)$ 과 $f(4)$, $f(7)$ 과 $f(8)$ 을 정하는 경우의 수는 각각 ${}_8C_2$ 이므로 $f(2) = f(6)$ 인 경우의 수는 $({}_8C_2)^3 = 28^3$ 이다. (ii) $f(1) = f(5)$, $f(2) \neq f(6)$ 인 경우 $f(1) = f(5) < f(2) < f(6)$ 또는 $f(1) = f(5) < f(6) < f(2)$ 이므로 $f(1)$, $f(2)$, $f(5)$, $f(6)$ 을 정하는 경우의 수는 $2 \times {}_8C_3 = 2 \times \frac{8 \times 7 \times 6}{3 \times 2 \times 1} = 112$ 이고, $f(3)$ 과 $f(4)$, $f(7)$ 과 $f(8)$ 을 정하는 경우의 수는 각각 ${}_8C_2 = 28$ 이므로 $f(2) \neq f(6)$ 인 경우의 수는 112×28^2 이다. (i), (ii)에 의해 $P(A \cap B) = \frac{28^3 + 112 \times 28^2}{8^8} = \frac{140 \times 28^2}{8^8}$ 따라서 구하는 확률은

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{140 \times 28^2}{8^8}}{\frac{28^4}{8^8}} = \frac{140}{28^2} = \frac{5}{28}$$

29. [출제의도] 같은 것이 있는 순열의 수를 이용하여 자연수의 개수를 구하는 문제를 해결한다.

일의 자리와 백의 자리에 오는 숫자가 1일 때, 나머지 네 자리에 2와 3이 적어도 하나씩 포함되는 경우는 다음과 같다. (i) 1, 1, 2, 3을 나열하는 경우 4개의 숫자를 나열하는 경우의 수는 $\frac{4!}{2!} = 12$ (ii) 1, 2, 2, 3 또는 1, 2, 3, 3을 나열하는 경우 4개의 숫자를 나열하는 경우의 수가 $\frac{4!}{2!} = 12$ 이므로 (ii)의 경우의 수는 $2 \times 12 = 24$ (iii) 2, 2, 2, 3 또는 2, 3, 3, 3을 나열하는 경우 4개의 숫자를 나열하는 경우의 수가 $\frac{4!}{3!} = 4$ 이므로 (iii)의 경우의 수는 $2 \times 4 = 8$ (iv) 2, 2, 3, 3을 나열하는 경우 4개의 숫자를 나열하는 경우의 수는 $\frac{4!}{2! \times 2!} = 6$

(i) ~ (iv)에 의해 일의 자리와 백의 자리에 오는 숫자가 1인 경우의 수는 $12 + 24 + 8 + 6 = 50$ 일의 자리와 백의 자리에 오는 숫자가 2인 경우의 수와 3인 경우의 수도 같은 방법으로 생각하면 각각 50이다. 따라서 구하는 자연수의 개수는 $3 \times 50 = 150$

30. [출제의도] 표본평균의 성질을 이용하여 모집단의 확률분포를 추론한다.

주머니에서 임의로 꺼낸 한 개의 공에 적혀 있는 수를 확률변수 Y 라 할 때, 확률변수 Y 의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

Y	1	2	3	4	합계
$P(Y = y)$	a	b	c	d	1

$X=4$ 인 경우는 4개의 수가 모두 1이어야 하므로 $P(X=4)=a^4$

$a^4=\frac{1}{81}$ 에서 $0\leq a\leq 1$ 이므로 $a=\frac{1}{3}$

$X=16$ 인 경우는 4개의 수가 모두 4이어야 하므로 $P(X=16)=d^4$

$16d^4=\frac{1}{81}$ 에서 $0\leq d\leq 1$ 이므로 $d=\frac{1}{6}$

$a+b+c+d=1$ 이므로

$b+c=\frac{1}{2}\cdots\cdots\textcircled{1}$

확인한 4개의 수의 표본평균을 \overline{Y} 라 하면 $X=4\overline{Y}$ 이다.

$E(X)=E(4\overline{Y})=4E(\overline{Y})=4E(Y)$
 $=4\left(\frac{1}{3}+2b+3c+\frac{4}{6}\right)=4(1+2b+3c)$

$E(X)=9$ 에서 $4(1+2b+3c)=9$ 이므로

$2b+3c=\frac{5}{4}\cdots\cdots\textcircled{2}$

$\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 에서 $b=\frac{1}{4}, c=\frac{1}{4}$

$V(X)=V(4\overline{Y})=16V(\overline{Y})=4V(Y)$
 $=4\{E(Y^2)-\{E(Y)\}^2\}$
 $=4\left\{\left(\frac{1}{3}+\frac{4}{4}+\frac{9}{4}+\frac{16}{6}\right)-\left(\frac{9}{4}\right)^2\right\}$
 $=4\left(\frac{25}{4}-\frac{81}{16}\right)=\frac{19}{4}$

따라서 $p=4, q=19$ 이므로 $p+q=23$

[미적분]

23	①	24	③	25	④	26	②	27	⑤
28	③	29	14	30	10				

23. [출제의도] 정적분의 값을 계산한다.

$\int_2^4\frac{6}{x^2}dx=\left[-\frac{6}{x}\right]_2^4=-\frac{3}{2}-(-3)=\frac{3}{2}$

24. [출제의도] 수렴하는 급수의 성질을 이해하여 극한 값을 구한다.

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n-4n}{n}=1$ 이므로 $\lim_{n\rightarrow\infty}\frac{a_n-4n}{n}=\lim_{n\rightarrow\infty}\left(\frac{a_n}{n}-4\right)=0$

$\lim_{n\rightarrow\infty}\frac{a_n}{n}=\lim_{n\rightarrow\infty}\left\{\left(\frac{a_n}{n}-4\right)+4\right\}=\lim_{n\rightarrow\infty}\left(\frac{a_n}{n}-4\right)+\lim_{n\rightarrow\infty}4$
 $=0+4=4$

$\lim_{n\rightarrow\infty}\frac{5n+a_n}{3n-1}=\lim_{n\rightarrow\infty}\frac{5+\frac{a_n}{n}}{3-\frac{1}{n}}=\frac{5+4}{3-0}=3$

25. [출제의도] 미분법을 이용하여 평면 위를 움직이는 점의 속력을 구한다.

$\frac{dx}{dt}=\ln t+1, \frac{dy}{dt}=\frac{4\ln t-4}{(\ln t)^2}$ 이므로

시각 t 에서의 점 P의 속력은

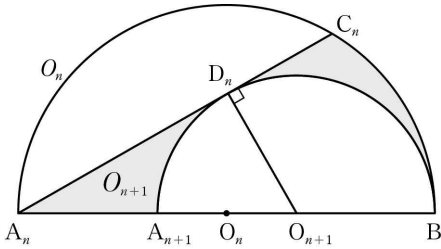
$\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}=\sqrt{(\ln t+1)^2+\left\{\frac{4\ln t-4}{(\ln t)^2}\right\}^2}$

따라서 시각 $t=e^2$ 에서 점 P의 속력은

$\sqrt{(\ln e^2+1)^2+\left\{\frac{4\ln e^2-4}{(\ln e^2)^2}\right\}^2}=\sqrt{3^2+1^2}=\sqrt{10}$

26. [출제의도] 도형 사이의 관계를 추론하여 등비급수의 합을 구한다.

반원 O_n 의 중심을 O_n , 반지름을 r_n 이라 하자.



삼각형 $O_{n+1}A_nD_n$ 은 $\angle O_{n+1}A_nD_n=\frac{\pi}{6}$ 인 직각삼각형

이므로 $\sin(\angle O_{n+1}A_nD_n)=\frac{1}{2}$

$\frac{\overline{D_nO_{n+1}}}{\overline{A_nO_{n+1}}}=\frac{1}{2}, \frac{r_{n+1}}{2r_n-r_{n+1}}=\frac{1}{2}$

$r_{n+1}=\frac{2}{3}r_n\cdots\cdots\textcircled{1}$

$r_1=1$ 이므로 $r_2=\frac{2}{3}$

$\angle A_1O_1C_1=\frac{2\pi}{3}, \overline{A_1O_1}=\overline{C_1O_1}=1$ 이므로

삼각형 $A_1O_1C_1$ 의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\overline{A_1O_1}\times\overline{C_1O_1}\times\sin\frac{2\pi}{3}=\frac{1}{2}\times 1\times 1\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{4}$

$\angle BO_1C_1=\frac{\pi}{3}, \overline{C_1O_1}=\overline{BO_1}=1$ 이므로

부채꼴 O_1BC_1 의 넓이는 $\frac{1}{2}\times 1^2\times\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{6}$

반원 O_2 의 넓이는 $\frac{1}{2}\times(r_2)^2\times\pi=\frac{1}{2}\times\left(\frac{2}{3}\right)^2\times\pi=\frac{2\pi}{9}$

S_1 (삼각형 $A_1O_1C_1$ 의 넓이)+(부채꼴 O_1BC_1 의 넓이)
-(반원 O_2 의 넓이)

$=\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{\pi}{6}-\frac{2\pi}{9}$

$=\frac{\sqrt{3}}{4}-\frac{\pi}{18}\cdots\cdots\textcircled{2}$

$\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 에서 수열 $\{S_n\}$ 은 첫째항이 $\frac{\sqrt{3}}{4}-\frac{\pi}{18}$ 이고 공

비가 $\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{4}{9}$ 인 등비수열의 첫째항부터 제 n 항까지의 합이다.

따라서 $\lim_{n\rightarrow\infty}S_n=\frac{\frac{\sqrt{3}}{4}-\frac{\pi}{18}}{1-\frac{4}{9}}=\frac{9\sqrt{3}-2\pi}{20}$

27. [출제의도] 치환적분법과 부분적분법을 이용하여 문제를 해결한다.

조건 (가)에 의해 함수 $f(x)$ 는 감소한다.

그러므로 조건 (나)에 의해

$f(-1)=1, f(3)=-2$ 즉 $f^{-1}(1)=-1, f^{-1}(-2)=3$

$\int_{-2}^1f^{-1}(x)dx$ 에서 $f^{-1}(x)=t$ 로 놓으면

$x=-2$ 일 때 $t=3, x=1$ 일 때 $t=-1$ 이고,

$x=f(t)$ 에서 $\frac{dx}{dt}=f'(t)$ 이므로

$\int_{-2}^1f^{-1}(x)dx=\int_3^{-1}tf'(t)dt$
 $=\left[tf(t)\right]_3^{-1}-\int_3^{-1}f(t)dt$
 $=-f(-1)-3f(3)+\int_{-1}^3f(t)dt$
 $=-1+6+3=8$

28. [출제의도] 삼각형의 성질을 이용하여 삼각함수의 극한에 대한 문제를 해결한다.

삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{AC}^2=1^2+2^2-2\times 1\times 2\times\cos\theta=5-4\cos\theta$ 이므로

$\overline{AC}=\sqrt{5-4\cos\theta}$

직선 AE가 $\angle BAC$ 의 이등분선이므로

$\overline{BE}:\overline{CE}=\overline{AB}:\overline{AC}=1:\sqrt{5-4\cos\theta}$ 에서

$\overline{BE}=\frac{1}{1+\sqrt{5-4\cos\theta}}\times\overline{BC}=\frac{2}{1+\sqrt{5-4\cos\theta}}$

그러므로

$f(\theta)=\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{BE}\times\sin(\angle CBA)$

$=\frac{1}{2}\times 1\times\frac{2}{1+\sqrt{5-4\cos\theta}}\times\sin\theta$

$=\frac{\sin\theta}{1+\sqrt{5-4\cos\theta}}$

두 직선 AB, DM이 서로 평행하므로

$\angle CDM=\theta, \angle BAE=\angle DFE$

이다. 이때 $\angle BAE=\angle FAC$ 이므로 삼각형 AMF는

이등변삼각형이다. 점 M은 선분 AC의 중점이므로

$\overline{FM}=\frac{1}{2}\times\overline{AC}=\frac{\sqrt{5-4\cos\theta}}{2}$ 이고

$\overline{BD}=\overline{CD}=1, \overline{DM}=\frac{1}{2}$

그러므로 $\overline{DF}=\overline{FM}-\overline{DM}=\frac{\sqrt{5-4\cos\theta}-1}{2}$

$\angle FDC=\pi-\angle CDM=\pi-\theta$ 이므로

$g(\theta)=\frac{1}{2}\times\overline{CD}\times\overline{DF}\times\sin(\angle FDC)$

$=\frac{1}{2}\times 1\times\frac{\sqrt{5-4\cos\theta}-1}{2}\times\sin(\pi-\theta)$

$=\frac{\sqrt{5-4\cos\theta}-1}{4}\times\sin\theta$

따라서

$\lim_{\theta\rightarrow 0+}\frac{g(\theta)}{\theta^2\times f(\theta)}=\lim_{\theta\rightarrow 0+}\frac{\frac{\sin\theta}{4}(\sqrt{5-4\cos\theta}-1)}{\theta^2\times\frac{\sin\theta}{1+\sqrt{5-4\cos\theta}}}$
 $=\lim_{\theta\rightarrow 0+}\frac{(\sqrt{5-4\cos\theta}-1)(\sqrt{5-4\cos\theta}+1)}{4\theta^2}$
 $=\lim_{\theta\rightarrow 0+}\frac{(5-4\cos\theta)-1}{4\theta^2}$
 $=\lim_{\theta\rightarrow 0+}\frac{1-\cos\theta}{\theta^2}$
 $=\lim_{\theta\rightarrow 0+}\frac{(1-\cos\theta)(1+\cos\theta)}{\theta^2(1+\cos\theta)}$
 $=\frac{1}{2}\times\lim_{\theta\rightarrow 0+}\frac{\sin^2\theta}{\theta^2}$
 $=\frac{1}{2}$

29. [출제의도] 정적분의 성질과 삼각함수의 성질을 이용하여 문제를 해결한다.

조건 (가)에서

$\int_0^{\frac{\pi}{a}}f(x)dx=\int_0^{\frac{\pi}{a}}\sin(ax)dx$
 $=\left[-\frac{1}{a}\cos(ax)\right]_0^{\frac{\pi}{a}}=\frac{2}{a}$

$\frac{2}{a}\geq\frac{1}{2}$ 이므로

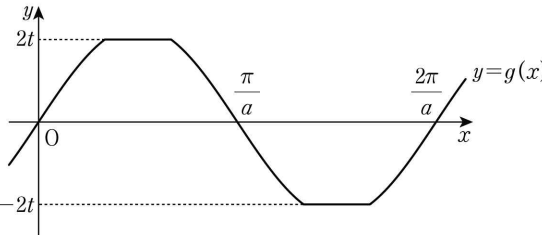
$0< a\leq 4\cdots\cdots\textcircled{1}$

조건 (나)에서

$\int_0^{3\pi}\{|f(x)+t|-|f(x)-t|\}dx=0$

$g(x)=|f(x)+t|-|f(x)-t|$ 라 하면

$g(x)=\begin{cases}-2t & (-1\leq\sin(ax)<-t) \\ 2\sin(ax) & (-t\leq\sin(ax)<t) \\ 2t & (t\leq\sin(ax)\leq 1) \end{cases}$



함수 $y=g(x)$ 의 그래프가 그림과 같으므로

$0< k<\frac{2\pi}{a}$ 인 모든 실수 k 에 대하여

$\int_0^k g(x)dx>0$ 이고, $\int_0^{\frac{2\pi}{a}} g(x)dx=0$ 이다.

함수 $g(x)$ 는 주기가 $\frac{2\pi}{a}$ 이고 $\int_0^{3\pi} g(x)dx=0$ 이므로

$3\pi=\frac{2\pi}{a}\times n$ (n 은 자연수), $a=\frac{2}{3}n$

$\textcircled{1}$ 에서 $0<\frac{2}{3}n\leq 4$

따라서 구하는 모든 실수 a 의 값은

$\frac{2}{3}, \frac{4}{3}, 2, \frac{8}{3}, \frac{10}{3}, 4$ 이므로 그 합은 14이다.

30. [출제의도] 합성함수의 미분법과 역함수의 미분법을 이용하여 문제를 해결한다.

$f(x)=-\frac{ax^3+bx}{x^2+1}$ 에서

$f'(x)=-\frac{(3ax^2+b)(x^2+1)-(ax^3+bx)(2x)}{(x^2+1)^2}$ 이므로

$f'(x)=-\frac{ax^4+(3a-b)x^2+b}{(x^2+1)^2}$ ㉠

모든 실수 x 에 대하여 $x^2+1 \neq 0$ 이므로 함수 $f'(x)$ 는 실수 전체의 집합에서 연속이다.

모든 실수 x 에 대하여 $f'(x) \neq 0$ 이고 $f'(0)=-b < 0$ 이므로 모든 실수 x 에 대하여 $f'(x) < 0$ 이다.

$h(x)=g(f(x))=f(f(x))-x$ 이므로

$h(0)=f(f(0))-0=f(0)=0$ 이다.

조건 (가)에서 $g(2)=f(2)-f^{-1}(2)=h(0)=0$ 이므로

$f(2)=f^{-1}(2)=t$ (t 는 상수)라 하면 $f(t)=2$ 이다.

모든 실수 x 에 대하여 $f(-x)=-f(x)$ 이므로

$f(-2)=-f(2)=-t$ 이다.

즉 두 점 $(t, 2)$, $(-2, -t)$ 는 함수 $y=f(x)$ 의 그래프 위에 있다.

$t \neq -2$ 일 때, 두 점 $(t, 2)$, $(-2, -t)$ 를 지나는 직선의 기울기는 $\frac{2-(-t)}{t-(-2)}=1$ 이므로 평균값 정리에 의하여

$f'(c)=1$ 인 상수 c 가 존재한다. 그러나 모든 실수 x 에 대하여 $f'(x) < 0$ 이므로 모순이다. 즉 $t=-2$

$f(2)=-2$ 에서 $-\frac{8a+2b}{5}=-2$

그러므로 $4a+b=5$ ㉡

$f^{-1}(2)=-2$ 이므로 역함수의 미분법에 의하여

$g'(2)=f'(2)-(f^{-1})'(2)=f'(2)-\frac{1}{f'(-2)}$

㉠에서 모든 실수 x 에 대하여 $f'(-x)=f'(x)$ 이므로 $f'(-2)=f'(2)$ 이다.

즉 $g'(2)=f'(2)-\frac{1}{f'(2)}$

$h(x)=f(f(x))-x$ 에서 $h'(x)=f'(f(x))f'(x)-1$ 이므로

$h'(2)=f'(f(2))f'(2)-1=f'(-2)f'(2)-1=\{f'(2)\}^2-1$

조건 (나)에서 $g'(2)=-5h'(2)$ 이므로

$f'(2)-\frac{1}{f'(2)}=-5\{f'(2)\}^2+5$

$5\{f'(2)\}^3+\{f'(2)\}^2-5f'(2)-1=0$

$\{5f'(2)+1\}\{f'(2)+1\}\{f'(2)-1\}=0$

$f'(x) < 0$ 이므로 $f'(2)=-\frac{1}{5}$ 또는 $f'(2)=-1$ 이다.

㉡에서 $f'(2)=-\frac{16a+4(3a-b)+b}{(4+1)^2}=-\frac{28a-3b}{25}$

(i) $f'(2)=-\frac{1}{5}$ 일 때, $-\frac{28a-3b}{25}=-\frac{1}{5}$ 이므로

$28a-3b=5$ ㉢

㉡, ㉢을 연립하면 $a=\frac{1}{2}$, $b=3$ 이다.

(ii) $f'(2)=-1$ 일 때, $-\frac{28a-3b}{25}=-1$ 이므로

$28a-3b=25$ ㉣

㉡, ㉣을 연립하면 $a=1$, $b=1$ 이므로 모순이다.

따라서 (i), (ii)에 의하여 $4(b-a)=4 \times \left(3-\frac{1}{2}\right)=10$

[기하]

23	㉓	24	㉑	25	㉒	26	㉔	27	㉕
28	㉑	29	32	30	7				

23. [출제의도] 평행한 두 벡터의 성질을 이용하여 벡터의 성분을 구한다.

0이 아닌 실수 k 에 대하여 $\vec{b}=k\vec{a}$

$(2m+1, 9)=(k(m-2), 3k)$ 이므로

$3k=9$, $k=3$

$2m+1=3(m-2)$, $2m+1=3m-6$

따라서 $m=7$

24. [출제의도] 좌표공간에서 선분의 내분점을 이해하여 선분의 길이를 구한다.

점 P는 선분 AB를 $m:n$ 으로 내분하는 점이므로

점 P의 좌표는 $\left(\frac{2m-n}{m+n}, \frac{4m+n}{m+n}, \frac{m-2n}{m+n}\right)$ 이다.

xy 평면 위의 점 P의 z 좌표는 0이므로

$m-2n=0$, $m=2n$

그러므로 점 P의 좌표는 (1, 3, 0) 이다.

따라서 선분 AP의 길이는

$\sqrt{\{1-(-1)\}^2+\{3-1\}^2+\{0-(-2)\}^2}=2\sqrt{3}$

25. [출제의도] 타원과 포물선의 접선의 방정식을 이해한다.

타원 $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{16}=1$ 에 접하고 기울기가 $\frac{1}{2}$ 인

접선의 방정식은 $y=\frac{1}{2}x \pm \sqrt{36 \times \frac{1}{4}+16}$, $y=\frac{1}{2}x \pm 5$

포물선 $y^2=ax$ 에 접하고 기울기가 $\frac{1}{2}$ 인

접선의 방정식은 $y=\frac{1}{2}x+\frac{\frac{a}{4}}{\frac{1}{2}}$, $y=\frac{1}{2}x+\frac{a}{2}$

a 가 양수이므로 $\frac{a}{2}=5$, $a=10$

따라서 포물선 $y^2=ax$ 의 초점의 x 좌표는 $\frac{a}{4}=\frac{5}{2}$

26. [출제의도] 두 벡터의 합을 이해하여 벡터의 크기를 구한다.

선분 BC의 중점을 M이라 하면 $\frac{\vec{AB}+\vec{AC}}{2}=\vec{AM}$ 이다.

$|\vec{AB}+\vec{AC}|=2\sqrt{5}$ 이므로 $|\vec{AM}|=\sqrt{5}$

$\vec{AD}=\vec{BM}=\vec{CM}$ 이고 변 AD와 변 BC가 평행하므로 사각형 ABMD와 사각형 AMCD는 평행사변형이다.

평행사변형 AMCD에서 $\vec{CD}=\vec{AM}=\sqrt{5}$

사각형 ABMD가 평행사변형이므로

$\angle MBA=\angle CMD=\angle DCM$

즉 삼각형 DMC는 이등변삼각형이므로 $\vec{DM}=\sqrt{5}$

점 D에서 선분 BC에 내린 수선의 발을 H라 하면

$\vec{CM}=2$ 이므로 $\vec{HM}=\vec{CH}=1$

직각삼각형 DMH에서

$\vec{DH}=\sqrt{\vec{DM}^2-\vec{HM}^2}=\sqrt{5-1}=2$

$\vec{BH}=\vec{BM}+\vec{HM}=2+1=3$

직각삼각형 DBH에서

$|\vec{BD}|^2=|\vec{BH}|^2+|\vec{DH}|^2=3^2+2^2=13$

따라서 $|\vec{BD}|=\sqrt{13}$

27. [출제의도] 구의 방정식을 이용하여 구와 좌표축의 관계에 대한 문제를 해결한다.

좌표공간의 점 A의 좌표를 (a, b, c) 라 하면

$\vec{OA}=7$ 이므로 $\sqrt{a^2+b^2+c^2}=7$

$a^2+b^2+c^2=49$ ㉠

구 S의 방정식은

$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=64$

xy 평면 위의 모든 점의 z 좌표는 0이므로

구 S와 xy 평면이 만나서 생기는 원 C의 반지름의 길이는 $\sqrt{64-c^2}$ 이다. 원 C의 넓이가 25π 이므로

$64-c^2=25$, $c^2=39$

㉠에서 $a^2+b^2=49-c^2=49-39=10$

점 A에서 z 축에 내린 수선의 발을 H라 하면 점 H의 좌표는 (0, 0, c)이다.

$\vec{AH}=\sqrt{(a-0)^2+(b-0)^2+(c-c)^2}=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{10}$

점 B는 구 위의 점이므로 $\vec{AB}=8$

직각삼각형 ABH에서

$\vec{BH}=\sqrt{\vec{AB}^2-\vec{AH}^2}=\sqrt{64-10}=\sqrt{54}=3\sqrt{6}$

따라서 $\vec{BC}=2 \times \vec{BH}=2 \times 3\sqrt{6}=6\sqrt{6}$

28. [출제의도] 벡터의 내적을 이용하여 도형에 대한 문제를 해결한다.

$\vec{PA} \cdot \vec{PC}=0$ 이므로 두 벡터 \vec{PA} 와 \vec{PC} 가 이루는 각의 크기는 90° 이다.

$\frac{|\vec{PA}|}{|\vec{PC}|}=3$ 에서 $|\vec{PC}|=t$ ($t > 0$)이라 하면 $|\vec{PA}|=3t$

두 벡터 \vec{PB} 와 \vec{PC} 가 이루는 각의 크기를 θ 라 하면

$\vec{PB} \cdot \vec{PC}=|\vec{PB}||\vec{PC}|\cos\theta=-\frac{\sqrt{2}}{2}|\vec{PB}||\vec{PC}|$ 이므로

$\cos\theta=-\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\theta=135^\circ$

$-\frac{\sqrt{2}}{2}|\vec{PB}||\vec{PC}|=-2|\vec{PC}|^2$ 에서

$|\vec{PB}|=2\sqrt{2}|\vec{PC}|$ 이므로 $|\vec{PB}|=2\sqrt{2}t$

$\angle APB=\angle BPC=135^\circ$, $\angle CPA=90^\circ$ 이므로

세 삼각형 ABP, BCP, CAP의 넓이를 각각

S_1 , S_2 , S_3 이라 하면

$S_1:S_2:S_3=3t^2:t^2:\frac{3}{2}t^2=6:2:3$

직선 AP와 변 BC의 교점이 D이므로

$\vec{AD}:\vec{DP}=(S_1+S_2+S_3):S_2=11:2$

따라서 $\vec{AD}=\frac{11}{2}\vec{PD}$ 이므로 $k=\frac{11}{2}$

29. [출제의도] 쌍곡선의 정의를 이용하여 문제를 해결한다.

직선 QR가 $\angle FQP$ 를 이등분하므로 $\vec{PQ}:\vec{QF}=\vec{PR}:\vec{RF}$

이때 $4\vec{PR}=3\vec{RF}$ 이므로 $\vec{PQ}:\vec{QF}=3:4$

$\vec{PQ}=3k$ ($k > 0$)이라 하면 $\vec{QF}=4k$ 이고 $\angle PQF=90^\circ$

이므로 삼각형 PQF에서 $\vec{PF}=5k$

쌍곡선의 정의에 의하여 $\vec{PF'}-\vec{PF}=2$ 이므로

$\vec{PF'}=5k+2$, $\vec{QF'}=\vec{PF'}-\vec{PQ}=(5k+2)-3k=2k+2$

F($\sqrt{17}$, 0), F'($-\sqrt{17}$, 0)이므로 직각삼각형 QF'F에서

$\vec{FF'}^2=\vec{QF}^2+\vec{QF'}^2$, $(2\sqrt{17})^2=(4k)^2+(2k+2)^2$

$5k^2+2k-16=0$, $(5k-8)(k+2)=0$, $k=\frac{8}{5}$ ($k > 0$)

따라서 삼각형 PF'F의 넓이는

$\frac{1}{2} \times \vec{PF'} \times \vec{QF}=\frac{1}{2} \times 10 \times \frac{32}{5}=32$

30. [출제의도] 삼수선의 정리를 이용하여 정사영의 넓이에 대한 문제를 해결한다.

조건 (나)에서 $\angle CED=90^\circ$ 이므로 두 직선 BC, DE는 서로 수직이다.

삼수선의 정리에 의하여

$\vec{AH} \perp$ (평면 BCD), $\vec{HE} \perp \vec{BC}$ 이므로 $\vec{AE} \perp \vec{BC}$

즉 직선 BC와 평면 AED는 서로 수직이므로

두 직선 BC, AD도 서로 수직이다. ㉠

조건 (가)에서 두 삼각형 AEH, DAH는 닮음이므로

$\angle DAE=\angle EAH+\angle HAD=90^\circ$

그러므로 두 직선 AD, AE는 서로 수직이다. ㉡

㉠, ㉡에서 직선 AD는 평면 ABC와 서로 수직이다.

정삼각형 ABC에서 $\vec{AE} \perp \vec{BC}$ 이므로 점 E는 선분 BC의 중점이다. 즉 $\vec{AE}=2\sqrt{3}$

직각삼각형 AED에서

$\vec{AD}=\sqrt{\vec{DE}^2-\vec{AE}^2}=\sqrt{4^2-(2\sqrt{3})^2}=2$

직각삼각형 AED에서 $\vec{AE} \times \vec{AD}=\vec{AH} \times \vec{DE}$ 이므로

$2\sqrt{3} \times 2=\vec{AH} \times 4$, $\vec{AH}=\sqrt{3}$

직각삼각형 AHD에서

$\vec{DH}=\sqrt{\vec{AD}^2-\vec{AH}^2}=\sqrt{2^2-(\sqrt{3})^2}=1$

삼각형 AHD의 넓이는 $\frac{1}{2} \times \sqrt{3} \times 1=\frac{\sqrt{3}}{2}$

두 평면 ABD, AHD가 이루는 예각의 크기를 θ 라

하면 $\theta=\angle BAE=30^\circ$ 이므로 구하는 정사영의 넓이는

$\frac{\sqrt{3}}{2} \times \cos 30^\circ=\frac{3}{4}$

따라서 $p=4$, $q=3$ 이므로 $p+q=4+3=7$