

● 수학 영역 ●

수학 정답

1	③	2	④	3	⑤	4	①	5	⑤
6	②	7	③	8	②	9	④	10	①
11	④	12	③	13	⑤	14	②	15	①
16	⑤	17	④	18	②	19	①	20	③
21	②	22	35	23	5	24	22	25	3
26	9	27	16	28	12	29	15	30	250

해 설

1. [출제의도] 다항식의 덧셈을 계산한다.

$$\begin{aligned} A+B &= (x^3+2x^2)+(2x^3-x^2-1) \\ &= (x^3+2x^3)+(2x^2-x^2)-1 \\ &= 3x^3+x^2-1 \end{aligned}$$

2. [출제의도] 조건의 진리집합을 이해한다.

실수 x 에 대한 조건 ‘ x 는 음이 아닌 실수이다.’의 진리집합은 $\{x \mid x \geq 0\}$ 이다.

3. [출제의도] 순열의 수를 계산한다.

$${}_5P_3 = 5 \times 4 \times 3 = 60$$

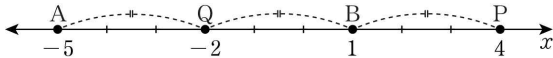
4. [출제의도] 수직선 위의 선분의 외분을 이해하여 점의 좌표를 구한다.

두 점 A(-5), B(1)에 대하여 선분 AB를 3:1로 외분하는 점의 좌표는

$$\frac{3 \times 1 - 1 \times (-5)}{3 - 1} = \frac{3 + 5}{2} = 4$$

[보충 설명]

선분 AB를 3:1로 외분하는 점을 P라 할 때, 세 점 A(-5), B(1), P(4)의 위치는 그림과 같고, 두 점 B(1), Q(-2)는 선분 AP를 삼등분하는 점이다.



5. [출제의도] 복소수의 값을 계산한다.

$$\begin{aligned} (\sqrt{2} + \sqrt{-2})^2 &= (\sqrt{2} + \sqrt{2}i)^2 \\ &= \{\sqrt{2}(1+i)\}^2 \\ &= (\sqrt{2})^2(1+i)^2 \\ &= 2 \times (1+2i+i^2) \\ &= 2 \times (1+2i-1) \\ &= 2 \times 2i = 4i \end{aligned}$$

6. [출제의도] 곱셈 공식을 이해하여 식의 값을 구한다.

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a+b)$$

에서 $a+b=2$, $a^3+b^3=10$ 이므로

$$8 = 10 + 3ab \times 2$$

$$6ab = -2$$

$$ab = -\frac{1}{3}$$

7. [출제의도] 두 직선의 수직 조건을 이해하여 미지수의 값을 구한다.

직선 $3x+2y-1=0$, 즉 $y=-\frac{3}{2}x+\frac{1}{2}$ 의 기울기는

$-\frac{3}{2}$ 이다. 이 직선과 수직인 직선의 기울기를 m 이라

하면, $-\frac{3}{2} \times m = -1$ 에서 $m = \frac{2}{3}$

점 (6, a)를 지나고 기울기가 $\frac{2}{3}$ 인 직선의 방정식은

$$y = \frac{2}{3}(x-6) + a$$

이고 이 직선이 원점을 지나므로

$$0 = \frac{2}{3} \times (0-6) + a = -4 + a$$

$$a = 4$$

8. [출제의도] 이차함수의 그래프와 직선의 위치 관계를 이해하여 미지수의 값을 구한다.

이차함수 $y=x^2+ax+a^2$ 의 그래프가 직선 $y=-x$ 에 접하므로 이차방정식 $x^2+ax+a^2=-x$, 즉

$$x^2+(a+1)x+a^2=0$$

의 판별식을 D 라 하면 $D=0$ 이어야 한다.

$$\begin{aligned} D &= (a+1)^2 - 4a^2 \\ &= -3a^2 + 2a + 1 \\ &= -(3a+1)(a-1) = 0 \end{aligned}$$

$$a > 0 \text{ 이므로 } a = 1$$

9. [출제의도] 원의 접선의 방정식을 이해하여 미지수의 값을 구한다.

원 $x^2+y^2=r^2$ 위의 점 $(a, 4\sqrt{3})$ 에서의 접선의 방정식은

$$ax+4\sqrt{3}y=r^2, \quad ax+4\sqrt{3}y-r^2=0$$

이 접선이 직선

$$x-\sqrt{3}y+b=0$$

과 일치하므로

$$\frac{a}{1} = \frac{4\sqrt{3}}{-\sqrt{3}} = \frac{-r^2}{b}$$

에서

$$a=-4, \quad r^2=4b \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

한편, 점 $(a, 4\sqrt{3})$ 이 원 $x^2+y^2=r^2$ 위의 점이므로

$$a^2+(4\sqrt{3})^2=r^2$$

$$r^2=(-4)^2+(4\sqrt{3})^2=64$$

$$r>0 \text{ 이므로 } r=8$$

$$\textcircled{1} \text{에서 } b = \frac{r^2}{4} = \frac{64}{4} = 16$$

따라서

$$a+b+r=(-4)+16+8=20$$

[다른 풀이]

점 $(a, 4\sqrt{3})$ 을 A라 하자.

원 $x^2+y^2=r^2$ 위의 점 A에서의 접선의 방정식이

$x-\sqrt{3}y+b=0$ 이므로 이 접선의 기울기는 $\frac{\sqrt{3}}{3}$ 이다.

원점 O에 대하여 직선 OA는 이 접선과 수직이므로 직선 OA의 기울기는 $-\sqrt{3}$ 이다.

두 점 O(0, 0), A($a, 4\sqrt{3}$)을 지나는 직선의 기울기는

$$\frac{4\sqrt{3}}{a} \text{ 이므로}$$

$$\frac{4\sqrt{3}}{a} = -\sqrt{3}$$

$$a=-4$$

점 $(-4, 4\sqrt{3})$ 이 원 $x^2+y^2=r^2$ 위의 점이므로

$$(-4)^2+(4\sqrt{3})^2=16+48=64=r^2$$

$$r>0 \text{ 이므로 } r=8$$

따라서 원 $x^2+y^2=64$ 위의 점 $(-4, 4\sqrt{3})$ 에서의 접선의 방정식은

$$-4x+4\sqrt{3}y=64, \quad x-\sqrt{3}y+16=0$$

이고 이 접선이 직선 $x-\sqrt{3}y+b=0$ 과 일치하므로

$$b=16$$

따라서

$$a+b+r=(-4)+16+8=20$$

10. [출제의도] 삼차방정식을 이해하여 미지수의 값을 구한다.

$f(x)=x^3+2x-3$ 이라 하면 $f(1)=0$ 이므로 $f(x)$ 는 $x-1$ 을 인수로 갖는다. 조립제법을 이용하여 $f(x)$ 를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & 0 & 2 & -3 \\ & & 1 & 1 & 3 \\ \hline & 1 & 1 & 3 & 0 \end{array}$$

$$x^3+2x-3=(x-1)(x^2+x+3)=0$$

에서

$$x=1 \text{ 또는 } x^2+x+3=0$$

$x^2+x+3=0$ 에서

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \times 1 \times 3}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{11}i}{2}$$

$$a = -\frac{1}{2}, \quad b = \frac{\sqrt{11}}{2} \text{ 또는 } a = -\frac{1}{2}, \quad b = -\frac{\sqrt{11}}{2}$$

따라서

$$a^2b^2 = \frac{1}{4} \times \frac{11}{4} = \frac{11}{16}$$

11. [출제의도] 집합의 연산 법칙을 이해하여 조건을 만족시키는 집합의 원소의 개수를 구한다.

드모르간의 법칙에 의하여

$$\begin{aligned} A^C \cup B &= (A \cap B^C)^C \\ &= (A-B)^C \end{aligned}$$

$$n(A-B) = n(A) - n(A \cap B)$$

이때

$$A = \{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}$$

이고 집합 $A \cap B$ 는 30의 약수 중 3의 배수를 원소로 갖는 집합이므로

$$A \cap B = \{3, 6, 15, 30\}$$

$$n(U) = 50 \text{ 이므로}$$

$$\begin{aligned} n(A^C \cup B) &= n((A-B)^C) \\ &= n(U) - n(A-B) \\ &= n(U) - \{n(A) - n(A \cap B)\} \\ &= 50 - (8 - 4) = 46 \end{aligned}$$

12. [출제의도] 순열을 이용하여 조건을 만족시키는 경우의 수를 구하는 문제를 해결한다.

조건 (나)에서 2학년 학생 4명 중에서 2명이 양 끝에 있는 의자에 앉는 경우의 수는

$${}_4P_2 = 4 \times 3 = 12$$

위의 각각의 경우에 대하여 1학년 학생이 앉을 수 있는 의자를 ①, 2학년 학생이 앉을 수 있는 의자를 ②라 할 때, 조건 (가)를 만족시키도록 나머지 4명의 학생이 4개의 의자에 앉는 경우는 다음 3가지 중 하나이다.

$$\textcircled{1}\textcircled{2}\textcircled{1}\textcircled{2}, \textcircled{1}\textcircled{2}\textcircled{2}\textcircled{1}, \textcircled{2}\textcircled{1}\textcircled{2}\textcircled{1}$$

1학년 학생 2명과 2학년 학생 2명이 의자에 앉는 경우의 수는 위의 3가지 경우 모두

$$2! \times 2! = 4$$

로 같다.

따라서 구하는 경우의 수는

$$12 \times 3 \times 4 = 144$$

[다른 풀이]

먼저 2학년 학생 4명이 일렬로 앉은 후 1학년 학생 2명이 조건을 만족시키도록 앉는 경우를 생각하자.

2학년 학생 4명이 일렬로 앉는 경우의 수는

$$4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$$

이때 2학년 학생을 ②라 하자.

$$\textcircled{2} \vee \textcircled{2} \vee \textcircled{2} \vee \textcircled{2}$$

위의 각각의 경우에 대하여 두 조건 (가), (나)를 만족시키려면 1학년 학생 2명은 \vee 표시된 3곳 중에서 2곳을 택하여 앉아야 하므로 1학년 학생이 앉는 경우의 수는

$${}_3P_2 = 3 \times 2 = 6$$

따라서 구하는 경우의 수는

$$24 \times 6 = 144$$

13. [출제의도] 함수의 정의를 이해하여 식의 값을 구한다.

조건 (가)에서 f 는 항등함수이므로 $f(x)=x$ 이다.

조건 (가)에서 g 는 상수함수이므로 집합 X 의 원소 중 하나를 k 라 할 때, $g(x)=k$ 이다.

조건 (나)에서

$$f(x)+g(x)+h(x)=x+k+h(x)=7$$

이므로 $h(x)=-x+7-k$ 이다.

$x \in X$ 에서 $1 \leq x \leq 5$ 이므로
 $2-k \leq -x+7-k \leq 6-k$
 이때 $1 \leq h(x) \leq 5$ 이어야 하므로
 $2-k \geq 1$ 이고 $6-k \leq 5$
 에서 $k=1$ 이다.
 즉, $g(x)=1$, $h(x)=-x+6$ 에서
 $g(3)+h(1)=1+5=6$

[다른 풀이]

조건 (가)에서 g 는 상수함수이므로
 $g(3)=g(1)$ 이다.
 조건 (나)에서 $f(1)+g(1)+h(1)=7$ 이고
 조건 (가)에서 f 는 항등함수이므로
 $f(1)=1$ 이다.
 따라서
 $g(3)+h(1)=g(1)+h(1)$
 $=7-f(1)$
 $=7-1=6$

14. [출제의도] 연립부등식을 이해하여 조건을 만족시키는 미지수의 값을 구한다.

이차부등식 $x^2+3x-10 < 0$ 에서
 $(x+5)(x-2) < 0$, $-5 < x < 2$
 이 이차부등식을 만족시키는 정수 x 는 $-4, -3, -2, -1, 0, 1$ 이고 개수는 6이다.
 (i) $a=0$ 인 경우
 $ax \geq a^2$ 에서 $0 \times x \geq 0$ 이고 이 부등식의 해는 모든 실수이므로 주어진 연립부등식을 만족시키는 정수 x 의 개수는 6이다. 따라서 주어진 조건을 만족시키지 않는다.
 (ii) $a > 0$ 인 경우
 $ax \geq a^2$ 에서 $x \geq a$ 이므로 주어진 연립부등식을 만족시키는 정수 x 의 개수는 0 또는 1이다. 따라서 주어진 조건을 만족시키지 않는다.
 (iii) $a < 0$ 인 경우
 $ax \geq a^2$ 에서 $x \leq a$ 이므로 주어진 연립부등식을 만족시키는 정수 x 의 개수가 4이기 위해서는 그 값이 $-4, -3, -2, -1$ 이어야 한다. 따라서 정수 a 의 값은 -1 이다.
 (i), (ii), (iii)에서 $a=-1$

15. [출제의도] 항등식의 성질과 인수정리를 이해하여 식의 값을 구한다.

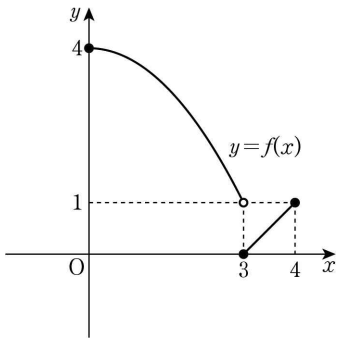
주어진 항등식의 양변에 $x=-2$ 를 대입하면
 $-8-4-6-2=0-2a$
 $a=10$
 $x^3-x^2+3x-2=(x+2)P(x)+10x$ 에서
 $(x+2)P(x)=x^3-x^2-7x-2$
 $Q(x)=x^3-x^2-7x-2$ 라 하면 $Q(-2)=0$ 이므로 $Q(x)$ 는 $x+2$ 를 인수로 갖는다.
 이때 조립제법을 이용하여 $Q(x)$ 를 인수분해하면

-2	1	-1	-7	-2
	-2	6	2	
	1	-3	-1	0

$Q(x)=x^3-x^2-7x-2$
 $=(x+2)(x^2-3x-1)$
 $(x+2)P(x)=(x+2)(x^2-3x-1)$
 이 등식이 x 에 대한 항등식이고 $P(x)$ 가 다항식이므로
 $P(x)=x^2-3x-1$
 따라서 $P(-2)=4+6-1=9$

16. [출제의도] 일대일대응을 이해하여 식의 값을 구한다.

집합 $\{x|3 \leq x \leq 4\}$ 에서 정의된 함수 $y=x-3$ 의 치역은 $\{y|0 \leq y \leq 1\}$ 이므로 함수 f 가 일대일대응이 되기 위해서는 집합 $\{x|0 \leq x < 3\}$ 에서 정의된 함수 $y=ax^2+b$ 의 치역이 $\{y|1 < y \leq 4\}$ 이어야 하고 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 그림과 같아야 한다.



따라서 이차함수 $g(x)$ 를 $g(x)=ax^2+b$ 라 할 때,
 $g(0)=4$, $g(3)=1$ 이다.
 $g(0)=4$ 에서 $b=4$
 $g(3)=1$ 에서 $9a+b=1$
 즉, $a=-\frac{1}{3}$

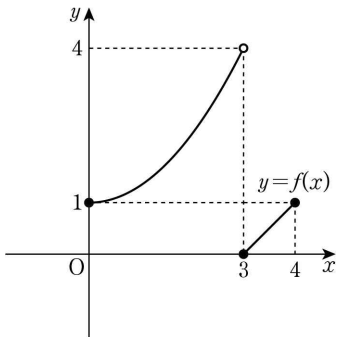
$$f(x)=\begin{cases} -\frac{1}{3}x^2+4 & (0 \leq x < 3) \\ x-3 & (3 \leq x \leq 4) \end{cases}$$

이므로

$$f(1)=-\frac{1}{3} \times 1^2+4=\frac{11}{3}$$

[보충 설명]

위의 풀이에서 이차함수 $g(x)=ax^2+b$ 에 대하여
 $g(0)=1$, $g(3)=4$ 인 경우에는 함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 그림과 같다.



이 경우에는 $f(0)=f(4)=1$ 이므로 함수 $f(x)$ 는 일대일대응이 아니다. 또한, 공역의 원소 4가 치역에 속하지 않으므로 함수 $f(x)$ 는 일대일대응이 아니다.

17. [출제의도] 이차방정식이 허근을 가질 조건을 이용하여 식의 최솟값을 구하는 문제를 해결한다.

조건 (가)에서 허수 z 는 x 에 대한 이차방정식
 $x^2+mx+n=0$ ㉠
 의 한 근이다. 이때 m, n 이 정수이고 z 가 허수이므로 방정식 ㉠은 $x=\bar{z}$ 도 근으로 갖는다.
 조건 (나)에서 $z+\bar{z}=8$ 이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
 $z+\bar{z}=-m=8$
 $m=-8$
 x 에 대한 이차방정식 $x^2-8x+n=0$ 이 허근을 갖기 위해서는 이 이차방정식의 판별식을 D 라 할 때 $D < 0$ 이어야 한다.

$$\begin{aligned} D &= (-8)^2 - 4n \\ &= 64 - 4n < 0 \\ n &> 16 \text{ 이므로 정수 } n \text{의 최솟값은 } 17 \text{이다.} \\ \text{따라서 } m+n \text{의 최솟값은} \\ -8+17 &= 9 \end{aligned}$$

[다른 풀이]

z 는 허수이므로 $z=a+bi$ (a, b 는 실수, $b \neq 0$)으로 놓을 수 있다.
 조건 (나)에서
 $z+\bar{z}=(a+bi)+(a-bi)$
 $=2a=8$
 이므로 $a=4$ 이다.
 조건 (가)에서
 $(4+bi)^2+m(4+bi)+n=(16+8bi+b^2i^2)+(4m+mbi)+n$
 $= (16+8bi-b^2)+(4m+mbi)+n$

$$\begin{aligned} &= (16-b^2+4m+n)+b(8+m)i \\ &= 0 \end{aligned}$$

이므로

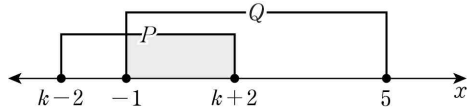
$$\begin{aligned} 16-b^2+4m+n &= 0 \quad \cdots \cdots \text{㉡} \\ b(8+m) &= 0 \quad \cdots \cdots \text{㉢} \end{aligned}$$

㉢에서 $b \neq 0$ 이므로 $m=-8$
 ㉡에서 $n=16+b^2$ 이고 $b \neq 0$ 이므로 $n > 16$
 그러므로 정수 n 의 최솟값은 17이다.
 따라서 $m+n$ 의 최솟값은
 $-8+17=9$

18. [출제의도] 명제의 참, 거짓을 이용하여 미지수의 값을 추론한다.

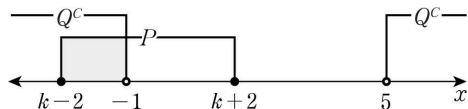
두 조건 p, q 의 진리집합을 각각 P, Q 라 하자.
 조건 p 에서
 $|x-k| \leq 2$, $k-2 \leq x \leq k+2$
 이므로
 $P=\{x|k-2 \leq x \leq k+2\}$
 조건 q 에서
 $x^2-4x-5 \leq 0$, $(x+1)(x-5) \leq 0$
 $-1 \leq x \leq 5$
 이므로
 $Q=\{x|-1 \leq x \leq 5\}$
 이고 이때
 $Q^C=\{x|x < -1 \text{ 또는 } x > 5\}$
 이다.

명제 $p \rightarrow q$ 와 명제 $p \rightarrow \sim q$ 가 모두 거짓이므로
 $P \not\subset Q$ 이고 $P \not\subset Q^C$
 즉, $P \cap Q^C \neq \emptyset$ 이고 $P \cap Q \neq \emptyset$ ㉠
 이어야 한다.
 $k-2 \geq -1$ 이고 $k+2 \leq 5$, 즉 $1 \leq k \leq 3$ 이면 $P \subset Q$ 가 되어 조건을 만족시키지 않으므로 다음과 같이 k 의 범위를 나누어 생각하자.
 (i) $k < 1$ 인 경우
 ㉠에서 $P \cap Q \neq \emptyset$ 이므로 [그림 1]과 같이
 $-1 \leq k+2$, 즉 $k \geq -3$ ㉡



[그림 1]

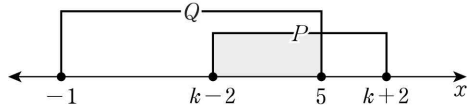
$P \cap Q^C \neq \emptyset$ 이므로 [그림 2]와 같이
 $k-2 < -1$, 즉 $k < 1$ ㉢



[그림 2]

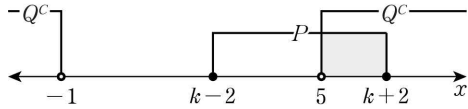
㉡, ㉢에서 $-3 \leq k < 1$ 이고 이 부등식을 만족시키는 정수 k 의 값은 $-3, -2, -1, 0$ 이다.

(ii) $k > 3$ 인 경우
 ㉠에서 $P \cap Q \neq \emptyset$ 이므로 [그림 3]과 같이
 $k-2 \leq 5$, 즉 $k \leq 7$ ㉣



[그림 3]

$P \cap Q^C \neq \emptyset$ 이므로 [그림 4]와 같이
 $5 < k+2$, 즉 $k > 3$ ㉤



[그림 4]

㉣, ㉤에서 $3 < k \leq 7$ 이고 이 부등식을 만족시키는 정수 k 의 값은 4, 5, 6, 7이다.

(i), (ii)에서 주어진 조건을 만족시키는 정수 k 의

값은 $-3, -2, -1, 0, 4, 5, 6, 7$ 이고 그 합은 $-3-2-1+0+4+5+6+7=16$

19. [출제의도] 주어진 조건을 만족시키는 집합을 추론한다.

조건 (가)에서 $0 \in A$

조건 (나)에서 명제 ' $a^2-2 \in A$ 이면 $a \in A$ '가 참이므로 이 명제의 대우 ' $a \in A$ 이면 $a^2-2 \in A$ '도 참이다.

$0 \in A$ 이므로

$0^2-2=-2 \in A$

$-2 \in A$ 이므로

$(-2)^2-2=4-2=2 \in A$

$2 \in A$ 이므로

$2^2-2=2 \in A$

그러므로 $\{-2, 0, 2\} \subset A$

조건 (다)에서 $n(A)=4$ 이므로

$A=\{-2, 0, 2, k\}$ (단, $k \neq -2, k \neq 0, k \neq 2$)

라 하자.

$k \in A$ 이면 $k^2-2 \in A$ 이므로 k^2-2 의 값은 $-2, 0, 2, k$ 중 하나이다.

(i) $k^2-2=-2$ 인 경우

$k^2=0$ 에서 $k=0$ 이 되어 $k \neq 0$ 에 모순이다.

(ii) $k^2-2=0$ 인 경우

$k^2=2$ 에서 $k=-\sqrt{2}$ 또는 $k=\sqrt{2}$

(iii) $k^2-2=2$ 인 경우

$k^2=4$ 에서 $k=-2$ 또는 $k=2$ 가 되어 $k \neq -2, k \neq 2$ 에 모순이다.

(iv) $k^2-2=k$ 인 경우

$k^2-k-2=0, (k-2)(k+1)=0$

이고 $k \neq 2$ 이므로

$k=-1$

(i)~(iv)에서 $k=-\sqrt{2}$ 또는 $k=\sqrt{2}$ 또는 $k=-1$

따라서 집합 A 가 될 수 있는 것은

$\{-2, 0, 2, -\sqrt{2}\}, \{-2, 0, 2, \sqrt{2}\}, \{-2, 0, 2, -1\}$

이고 개수는 3이다.

20. [출제의도] 무리함수의 그래프를 이용하여 함숫값을 구하는 문제를 해결한다.

방정식 $\{f(x)-\alpha\}\{f(x)-\beta\}=0$ 에서

$f(x)=\alpha$ 또는 $f(x)=\beta$ ㉠

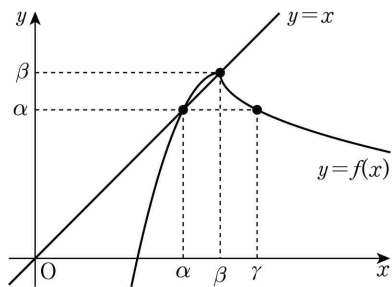
조건 (나)에서 $f(\alpha)=\alpha, f(\beta)=\beta$ 이고 조건 (가)에서 방정식 ㉠의 실근이 α, β, γ 뿐이므로 방정식 $f(x)=\alpha$ 의 실근이 α, γ 이고 방정식 $f(x)=\beta$ 의 실근이 β 뿐이거나, 방정식 $f(x)=\alpha$ 의 실근이 α 뿐이고 방정식 $f(x)=\beta$ 의 실근이 β, γ 이다.

방정식 $f(x)=\alpha$ 의 실근이 α, γ 이고 방정식 $f(x)=\beta$ 의 실근이 β 뿐인 경우를 생각하자.

방정식 $f(x)=\alpha$ 의 실근이 α, γ 이므로 곡선 $y=f(x)$ 와 직선 $y=\alpha$ 는 두 점에서 만나고 두 교점의 x 좌표는 각각 α, γ 이다. 또한, 방정식 $f(x)=\beta$ 의 실근이 β 뿐이므로 곡선 $y=f(x)$ 와 직선 $y=\beta$ 는 오직 한 점에서 만나고 이 점의 x 좌표는 β 이다. 이때 곡선 $y=f(x)$ 와 x 축에 평행한 직선이 오직 한 점에서 만나려면 만나는 점의 좌표가 (a, b) 이어야 한다. 그러므로 점 (a, b) 는 점 (β, β) 와 일치한다.

즉, $a=b=\beta$ ㉡

한편, $f(\alpha)=\alpha, f(\beta)=\beta$ 이므로 곡선 $y=f(x)$ 와 직선 $y=x$ 는 두 점 $(\alpha, \alpha), (\beta, \beta)$ 에서 만난다. 따라서 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 그림과 같다.



$f(x)=x$ 에서

$-(x-a)^2+b=x$

㉢에서

$-(x-\beta)^2+\beta=x,$

$(x-\beta)^2+(x-\beta)=0,$

$(x-\beta)(x-\beta+1)=0,$

$x=\beta-1$ 또는 $x=\beta$

$f(\alpha)=\alpha$ 이고 $\alpha \neq \beta$ 이므로

$\alpha=\beta-1$

$f(\gamma)=\alpha$ 이고 $\gamma > \beta=a$ 이므로

$-\sqrt{\gamma-a}+b=\alpha,$

$-\sqrt{\gamma-\beta}+\beta=\beta-1,$

$\sqrt{\gamma-\beta}=1,$

$\gamma=\beta+1$

이때 $\alpha+\beta+\gamma=15$ 이므로

$(\beta-1)+\beta+(\beta+1)=15$

$3\beta=15, \beta=5$

$\alpha=\beta-1=4, \gamma=\beta+1=6$

따라서 ㉢에서 $a=b=5$ 이고

$$f(x)=\begin{cases} -(x-5)^2+5 & (x \leq 5) \\ -\sqrt{x-5}+5 & (x > 5) \end{cases}$$

이므로

$$\begin{aligned} f(\alpha+\beta) &= f(9) \\ &= -\sqrt{9-5}+5 \\ &= 3 \end{aligned}$$

한편, 방정식 $f(x)=\alpha$ 의 실근이 α 뿐이고 방정식 $f(x)=\beta$ 의 실근이 β, γ 인 경우에도 같은 방법으로 $f(\alpha+\beta)=3$ 이다.

21. [출제의도] 삼각형의 무게중심의 성질을 이용하여 삼각형과 관련된 명제의 참, 거짓을 추론한다.

점 P의 좌표를 (a, b) 라 하고 점 Q의 좌표를 (x, y) 라 하면 삼각형 APQ의 무게중심의 좌표는

$$\left(\frac{x+a+4}{3}, \frac{y+b+2}{3} \right)$$

이고 이 점이 원점 O와 일치하므로

$$\frac{x+a+4}{3}=0, \frac{y+b+2}{3}=0$$

$x=-a-4, y=-b-2$

따라서 점 Q의 좌표는 $(-a-4, -b-2)$ 이다.

ㄱ. 두 점 P, Q의 좌표가 각각

$(a, b), (-a-4, -b-2)$

이므로 선분 PQ의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{a+(-a-4)}{2}, \frac{b+(-b-2)}{2} \right)$$

즉, $(-2, -1)$ 이다. (참)

ㄴ. 점 A'은 점 A(4, 2)를 원점에 대하여 대칭이동한 점이므로 점 A'의 좌표는

$(-4, -2)$

이고

$$\begin{aligned} \overline{A'Q} &= \sqrt{\{-4-(-a-4)\}^2 + \{-2-(-b-2)\}^2} \\ &= \sqrt{a^2+b^2} \end{aligned}$$

이때 점 P는 사분원의 호 C 위의 점이므로

$a^2+b^2=25$

따라서

$$\overline{A'Q} = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{25} = 5$$

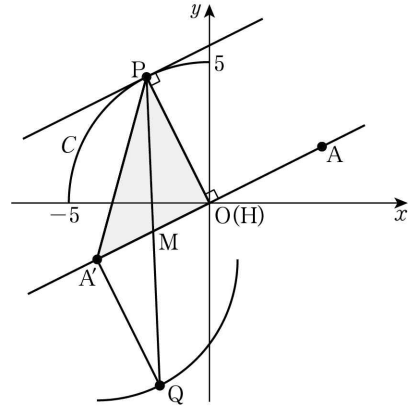
이므로 선분 A'Q의 길이는 5로 일정하다. (참)

ㄷ. 선분 OA'의 중점을 M이라 하면 점 M의 좌표는 $(-2, -1)$ 이고 이는 선분 PQ의 중점의 좌표와 일치하므로 사각형 OPA'Q는 평행사변형이다. 즉, 삼각형 A'QP의 넓이는 삼각형 OPA'의 넓이와 같다. 점 P에서 직선 OA'에 내린 수선의 발을 H라 하면

$$\begin{aligned} (\text{삼각형 OPA'의 넓이}) &= \frac{1}{2} \times \overline{OA'} \times \overline{PH} \\ &= \frac{1}{2} \times 2\sqrt{5} \times \overline{PH} \quad \dots\dots \text{㉠} \end{aligned}$$

이므로 선분 PH의 길이가 최대이면 삼각형 OPA'의 넓이도 최대이고, 선분 PH의 길이가 최소이면 삼각형 OPA'의 넓이도 최소이다.

선분 PH의 길이가 최대일 때는 사분원의 호 C 위의 점 P에서의 접선이 직선 OA'과 평행할 때이다.



[그림 1]

직선 OA'의 기울기는 $\frac{0-(-2)}{0-(-4)} = \frac{1}{2}$ 이므로

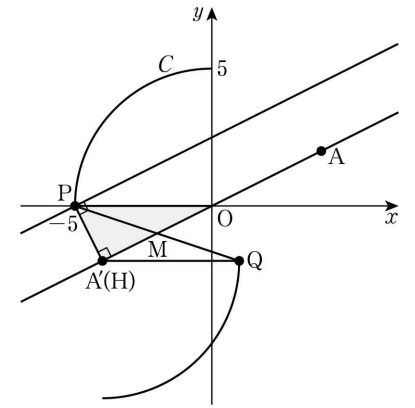
[그림 1]과 같이 접선의 기울기가 $\frac{1}{2}$ 이 되는 점

P가 반드시 존재하고 이때 $\overline{OP}=5$ 이다.

따라서 선분 PH의 길이의 최댓값은 5이므로 ㉠에서 삼각형 OPA'의 넓이의 최댓값은

$$M = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{5} \times 5 = 5\sqrt{5}$$

한편, 선분 PH의 길이가 최소일 때는 [그림 2]와 같이 점 P의 좌표가 $(-5, 0)$ 일 때이다.



[그림 2]

직선 OA'의 방정식은 $y = \frac{1}{2}x$, 즉 $x-2y=0$ 이므로

로 점 $(-5, 0)$ 과 직선 $x-2y=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|-5-0|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}} = \sqrt{5}$$

따라서 선분 PH의 길이의 최솟값은 $\sqrt{5}$ 이므로 ㉠에서 삼각형 OPA'의 넓이의 최솟값은

$$m = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{5} \times \sqrt{5} = 5$$

따라서

$$M \times m = 5\sqrt{5} \times 5 = 25\sqrt{5} \quad (\text{거짓})$$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

22. [출제의도] 집합의 연산을 이용하여 원소의 곱을 계산한다.

$A \cap B = \{-7, -5\}$

이므로 모든 원소의 곱은

$$(-7) \times (-5) = 35$$

23. [출제의도] 합성함수와 역함수의 값을 계산한다.

$f(1)=4, f(4)=3$ 이므로

$$(f \circ f)(1) = f(f(1)) = f(4) = 3$$

$f(2)=1$ 이므로 $f^{-1}(1)=2$

따라서

$$(f \circ f)(1) + f^{-1}(1) = 3 + 2 = 5$$

24. [출제의도] 나머지정리를 이해하여 식의 값을 구한

다.

다항식 $P(x)$ 를 x^2+3 으로 나눈 몫이 $3x+1$, 나머지가 $x+5$ 이므로

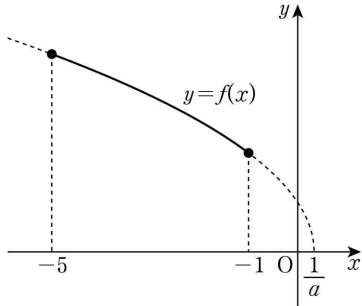
$$P(x)=(x^2+3)(3x+1)+x+5$$

나머지정리에 의하여 $P(x)$ 를 $x-1$ 로 나눈 나머지는

$$P(1)=4\times 4+6=22$$

25. [출제의도] 무리함수의 그래프를 이해하여 미지수의 값을 구한다.

a 가 양수이므로 $-5\leq x\leq -1$ 에서 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 그림과 같다.



따라서 $f(x)=\sqrt{-ax+1}$ 은 $x=-5$ 일 때 최대이고 최댓값이 4이므로

$$f(-5)=4$$

$$\sqrt{5a+1}=4$$

$$5a+1=16$$

따라서

$$a=3$$

26. [출제의도] 직선의 평행 조건을 이용하여 점의 좌표를 구하는 문제를 해결한다.

직선 CD의 기울기는 음수이므로

$$\frac{q-p}{3\sqrt{2}-\sqrt{2}}<0\text{에서}$$

$$q-p<0$$

$$\overline{AB}=\overline{CD}\text{에서}$$

$$3=\sqrt{(3\sqrt{2}-\sqrt{2})^2+(q-p)^2}$$

$$3^2=(2\sqrt{2})^2+(q-p)^2$$

$$1=(q-p)^2$$

$$q-p<0\text{에서 }q-p=-1$$

$$\text{즉, }q=p-1$$

$\overline{AD} // \overline{BC}$ 에서 직선 AD의 기울기와 직선 BC의 기울기가 서로 같으므로

$$\frac{q-1}{3\sqrt{2}-0}=\frac{p-4}{\sqrt{2}-0}$$

$$q-1=3p-12 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$q=p-1\text{을 } \textcircled{1}\text{에 대입하면}$$

$$p-2=3p-12$$

$$2p=10, \quad p=5$$

$$q=5-1=4$$

따라서

$$p+q=9$$

27. [출제의도] 조합을 이용하여 조건을 만족시키는 경우의 수를 구하는 문제를 해결한다.

서로 다른 네 종류의 인형이 각각 2개씩 있으므로 5개의 인형을 선택하려면 세 종류 이상의 인형을 선택해야 한다.

(i) 서로 다른 세 종류의 인형을 각각 1개, 2개, 2개 선택하는 경우

서로 다른 네 종류의 인형 중에서 세 종류의 인형을 선택하는 경우의 수는

$${}_4C_3=4$$

위의 각각의 경우에 대하여 세 종류의 인형 중에서 1개를 선택하는 인형의 종류를 정하면 남은 두 종류의 인형은 각각 2개씩 선택하면 되므로 이때의 경우의 수는

$${}_3C_1=3$$

따라서 이 경우의 수는

$$4\times 3=12$$

(ii) 서로 다른 네 종류의 인형을 각각 1개, 1개, 1개, 2개 선택하는 경우

서로 다른 네 종류의 인형 중에서 2개를 선택하는 인형의 종류를 정하면 남은 세 종류의 인형은 각각 1개씩 선택하면 되므로 이때의 경우의 수는

$${}_4C_1=4$$

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$$12+4=16$$

28. [출제의도] 이차방정식과 이차함수의 관계를 이용하여 미지수의 개수를 구하는 문제를 해결한다.

직선 $y=n$ 이 곡선 $y=x^2-4x+4$ 와 만나는 점의 x 좌표는 이차방정식 $x^2-4x+4=n$ 의 실근과 같다.

$$x^2-4x+4=n$$

$$(x-2)^2=n$$

$$x-2=\pm\sqrt{n}$$

$$x=2-\sqrt{n}\text{ 또는 }x=2+\sqrt{n}$$

x_1, x_2 중 작은 것을 α , 큰 것을 β 라 하면

$$\alpha=2-\sqrt{n}, \quad \beta=2+\sqrt{n}\text{이다.}$$

(i) $1\leq n\leq 4$ 인 경우

$$\alpha\geq 0, \quad \beta>0\text{이므로}$$

$$\frac{|x_1|+|x_2|}{2}=\frac{\alpha+\beta}{2}$$

$$=\frac{(2-\sqrt{n})+(2+\sqrt{n})}{2}$$

$$=2$$

따라서 $\frac{|x_1|+|x_2|}{2}$ 의 값이 자연수가 되는 n 의 값

은 1, 2, 3, 4이므로 개수는 4이다.

(ii) $n>4$ 인 경우

$$\alpha<0<\beta\text{이므로}$$

$$\frac{|x_1|+|x_2|}{2}=\frac{-\alpha+\beta}{2}$$

$$=\frac{(\sqrt{n}-2)+(2+\sqrt{n})}{2}$$

$$=\sqrt{n}$$

따라서 $\frac{|x_1|+|x_2|}{2}$ 의 값이 자연수가 되는 100 이하의 자연수 n 의 값은 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100이므로 개수는 8이다.

(i), (ii)에서 $\frac{|x_1|+|x_2|}{2}$ 의 값이 자연수가 되도록

하는 100 이하의 자연수 n 의 개수는

$$4+8=12$$

29. [출제의도] 도형의 평행이동과 대칭이동을 이용하여 미지수의 값을 구하는 문제를 해결한다.

원 $(x-6)^2+y^2=r^2$ 을 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이동한 원을 C_1 , x 축의 방향으로 k 만큼 평행이동한 원을 C_2 라 하자. 두 원 C_1, C_2 의 중심을 각각 A, B라 하면 두 점 A, B의 좌표는 각각 (0, 6), (6+k, 0)이고, 두 원 C_1, C_2 의 반지름의 길이는 모두 r 이다.

점 P를 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이동한 점을 P', 점 Q를 x 축의 방향으로 k 만큼 평행이동한 점을 Q'이라 하면 점 P'은 원 C_1 위의 점이고, 점 Q'은 원 C_2 위의 점이다. 이때 두 점 P'(x_1, y_1), Q'(x_2, y_2)에 대하여

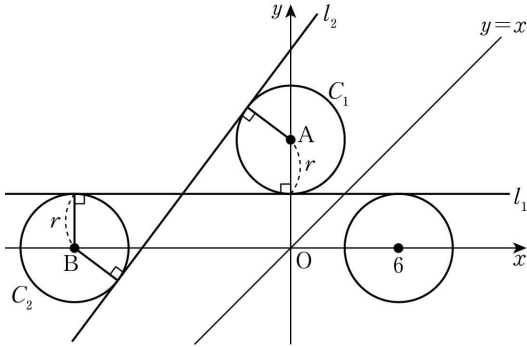
$\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ 의 값은 직선 P'Q'의 기울기와 같다.

직선 P'Q'의 기울기의 최솟값이 0이므로 그림과 같이 원 C_2 의 중심의 x 좌표가 $-2r$ 보다 작고, 두 원 C_1, C_2 는 모두 x 축에 평행한 직선 l_1 에 접한다.

$$\text{따라서 }6+k<-2r\text{이고 }r=6-r,\text{ 즉 }r=3$$

또한, 직선 P'Q'의 기울기의 최댓값이 $\frac{4}{3}$ 이므로 그림과 같이 두 원 C_1, C_2 는 모두 기울기가 $\frac{4}{3}$ 인 직선 l_2

에 접하고, 이때 원 C_2 의 중심의 x 좌표는 직선 l_2 의 x 절편보다 작다.



직선 l_2 의 방정식을 $y=\frac{4}{3}x+n$ 이라 하면 직선 l_2 의 y 절편은 점 A의 y 좌표보다 크므로 $n>6$ 이다.

점 A(0, 6)과 직선 $y=\frac{4}{3}x+n$, 즉 $4x-3y+3n=0$ 사이의 거리는 원 C_1 의 반지름의 길이와 같으므로

$$\frac{|0-18+3n|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}}=3$$

$$|3n-18|=15$$

$$n>6\text{이므로 }3n-18=15, \quad n=11$$

즉, 직선 l_2 의 방정식은 $4x-3y+33=0$ 이다.

점 B(6+k, 0)과 직선 $4x-3y+33=0$ 사이의 거리는 원 C_2 의 반지름의 길이와 같으므로

$$\frac{|4(6+k)-0+33|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}}=3$$

$$|4k+57|=15$$

$$k=-18\text{ 또는 }k=-\frac{21}{2}$$

이때

$$6+k=-12\text{ 또는 }6+k=-\frac{9}{2}$$

직선 l_2 의 x 절편이 $-\frac{33}{4}$ 이므로 $6+k=-12$ 이어야 하고, 이는 $6+k<-2r=-6$ 을 만족시킨다.

$$\text{즉, }k=-18\text{이다.}$$

$$\text{따라서 }|r+k|=|3+(-18)|=|-15|=15$$

30. [출제의도] 이차함수와 유리함수의 그래프를 추론하여 미지수의 값을 구한다.

$a<1$, 즉 $1-a>0$ 이므로

$x\leq a$ 에서 함수 $f(x)=\frac{1-a}{x-1}+2$ 는 x 의 값이 커지면 y

의 값은 작아진다. ㉠

이때 $x\leq a$ 에서 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 직선 $y=2$ 를 점근선으로 가지므로

$$x\leq a\text{이면 }f(a)\leq f(x)<2 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

이다.

조건 (가)에 의하여 $x\leq 0$ 에서 함수 $f(x)$ 는 $x=-2$ 에서 최솟이므로 a 의 값의 범위를 다음과 같이 나누어 구할 수 있다.

(i) $-2< a < 1$ 인 경우

㉠에서 $f(-2)>f(a)$ 가 되어 조건 (가)를 만족시키지 않는다.

(ii) $a=-2$ 인 경우

$$f(x)=\begin{cases} \frac{3}{x-1}+2 & (x\leq -2) \\ bx(x+2)+1 & (x>-2) \end{cases}$$

이다.

㉠에서 $x\leq -2$ 인 모든 실수 x 에 대하여

$$f(x)\geq f(-2)\text{이다.}$$

$$f(-2)=f(0)=1\text{이고}$$

$$-2< x\leq 0\text{에서 }f(x)=bx(x+2)+1\text{이므로}$$

조건 (가), (나)를 만족시키려면 $b<0$ 이어야 한다.

한편, 조건 (나)에서 함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 직선 $y=2$ 와 만나는 점의 개수와 함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 직선 $y=-2$ 와 만나는 점의 개수의 합이 2이어야 한다.

㉡에서

$$f(-2)=1\leq f(x)<2$$