

• 수학 영역 •

정답

1	③	2	②	3	①	4	④	5	④
6	③	7	②	8	⑤	9	④	10	⑤
11	①	12	①	13	①	14	③	15	⑤
16	⑤	17	③	18	④	19	①	20	②
21	⑤	22	81	23	13	24	9	25	7
26	52	27	56	28	35	29	17	30	5

해설

1. [출제의도] 지수 계산하기

$$(3^{2+\sqrt{2}})^{2-\sqrt{2}}=3^{(2+\sqrt{2})(2-\sqrt{2})}=3^{4-2}=3^2=9$$

2. [출제의도] 로그 계산하기

$$\frac{\log_4 64}{\log_4 8}=\log_8 64=\log_8 8^2=2$$

3. [출제의도] 부채꼴의 넓이 계산하기

부채꼴의 넓이를 S , 중심각의 크기를 θ , 반지름의 길이를 r 라 하면 $S=\frac{1}{2}r^2\theta$ 이므로

$$S=\frac{1}{2}\times 4^2\times \frac{5}{12}\pi=\frac{10}{3}\pi$$

4. [출제의도] 삼각함수가 포함된 방정식 이해하기

방정식 $2\sin x-1=0$ 에서 $\sin x=\frac{1}{2}$ 이므로

$-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}$ 일 때, 방정식 $2\sin x-1=0$ 의 해는 $x=\frac{\pi}{6}$ 이다.

5. [출제의도] 상용로그의 성질 이해하기

$\log 619=\log (6.19\times 10^2)=\log 6.19+2$
이고 상용로그표에서 $\log 6.19=0.7917$ 이므로
 $\log 619=2.7917$ 이다.

수	...	7	8	9
5.97760	.7767	.7774
6.07832	.7839	.7846
6.17903	.7910	.7917

6. [출제의도] 코사인법칙 이해하기

코사인법칙에 의해
 $\overline{BC}^2=\overline{AB}^2+\overline{AC}^2-2\times \overline{AB}\times \overline{AC}\times \cos A$
 $=3^2+6^2-2\times 3\times 6\times \frac{5}{9}=25$

이므로 $\overline{BC}=5$ 이다.

7. [출제의도] 지수함수의 그래프 이해하기

함수 $y=2^{x+a}+b$ 의 그래프의 점근선이 직선 $y=3$ 이므로 $b=3$ 이다. 이 함수의 그래프가 점 $(0, 5)$ 를 지나므로 $5=2^{0+a}+3$ 에서 $a=1$ 이다. 따라서 $a+b=4$

8. [출제의도] 로그함수의 그래프 이해하기

함수 $y=\log_2 x+1$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 a 만큼 평행이동한 그래프를 나타낸 함수는 $y=\log_2(x-a)+1$ 이고
함수 $y=\log_2(x-a)+1$ 의 그래프를 직선 $y=x$ 에

대하여 대칭이동한 그래프를 나타낸 함수는 $y=2^{x-1}+a$ 이다. 따라서 $a=5$

9. [출제의도] 삼각함수 사이의 관계를 이용하여 합숫값 계산하기

$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ 이고 $\sin\theta=-\frac{1}{3}$ 이므로

$$\cos^2\theta=1-\sin^2\theta=1-\frac{1}{9}=\frac{8}{9} \text{ 이다.}$$

$$\pi<\theta<\frac{3}{2}\pi \text{ 이므로 } \cos\theta=-\frac{2\sqrt{2}}{3} \text{ 이다.}$$

$$\text{따라서 } \tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{-\frac{1}{3}}{-\frac{2\sqrt{2}}{3}}=\frac{1}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{4}$$

10. [출제의도] 삼각함수의 그래프 이해하기

함수 $y=a\sin bx+c$ 의 주기가 4π 이고 $b>0$ 이므로

$$\frac{2\pi}{b}=4\pi \text{ 에서 } b=\frac{1}{2}$$

함수 $y=a\sin \frac{x}{2}+c$ 의 그래프가 점 $(\pi, 5)$ 를 지나

$$\text{므로 } 5=a\sin \frac{\pi}{2}+c \text{ 에서 } 5=a+c \cdots \textcircled{1}$$

함수 $y=a\sin \frac{x}{2}+c$ 의 그래프가 점 $(3\pi, 1)$ 을

$$\text{지나므로 } 1=a\sin \frac{3\pi}{2}+c \text{ 에서 } 1=-a+c \cdots \textcircled{2}$$

①과 ②를 연립하면 $a=2, c=3$ 이 되어

$$a\times b\times c=2\times \frac{1}{2}\times 3=3 \text{ 이다.}$$

11. [출제의도] 사인법칙 이해하기

삼각형의 세 각 A, B, C 에 대응하는 선분의 길이를 각각 a, b, c 라 하자. $A+B+C=\pi$ 이므로 $\sin(A+B)=\sin(\pi-C)=\sin C$ 이다.

$$\text{사인법칙에 의해 } \frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=8$$

이므로

$$\begin{aligned} &\sin A+\sin B+\sin(A+B) \\ &=\sin A+\sin B+\sin C \\ &=\frac{a+b+c}{8} \\ &=\frac{3}{2} \end{aligned}$$

12. [출제의도] 지수함수의 그래프 이해하기

함수 $f(x)=3^{x-2}+a$ 의 역함수의 그래프가 점 $(a+5, a+2)$ 를 지나므로 $f(a+2)=a+5$ 이다.
 $3^{a+2-2}+a=a+5$ 에서 $3^a=5$ 이다.

13. [출제의도] 지수부등식 이해하기

(i) $2^x-8\geq 0$ 이고 $3^{-x}-9\geq 0$ 일 때
 $2^x\geq 8$ 에서 $x\geq 3$ 이고 $3^{-x}\geq 9$ 에서 $x\leq -2$ 이다. 이를 만족시키는 정수 x 는 존재하지 않는다.

(ii) $2^x-8\leq 0$ 이고 $3^{-x}-9\leq 0$ 일 때
 $2^x\leq 8$ 에서 $x\leq 3$ 이고 $3^{-x}\leq 9$ 에서 $x\geq -2$ 이므로 $-2\leq x\leq 3$ 이다.
따라서 (i), (ii)에 의해 정수 x 의 개수는 6 이다.

14. [출제의도] 거듭제곱근의 성질 이해하기

$$\left(\frac{\sqrt[6]{5}}{\sqrt[4]{2}}\right)^m\times n=5^{\frac{m}{6}}\times \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{m}{4}}\times n=5^2\times 2^2 \text{ 에서}$$

$\frac{m}{6}$ 과 $\frac{m}{4}$ 이 자연수가 되어야 하므로 m 은 12의 배수이다.

(i) $m=12$ 일 때

$$5^{\frac{12}{6}}\times \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{12}{4}}\times n=5^2\times 2^2 \text{ 에서 } \left(\frac{1}{2}\right)^3\times n=2^2 \text{ 이므로 } n=32 \text{ 이다.}$$

(ii) $m\geq 24$ 일 때

$$5^{\frac{m}{6}}\times \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{m}{4}}\times n=5^2\times 5^{\frac{m-12}{6}}\times \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{m}{4}}\times n=5^2\times 2^2$$

에서 $5^{\frac{m-12}{6}}\times \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{m}{4}}\times n=2^2$ 이고

$5^{\frac{m-12}{6}}\times n=2^{\frac{m+8}{4}}$ 이므로 이를 만족시키는 자연수 n 은 존재하지 않는다.

따라서 (i), (ii)에 의해 $m=12, n=32$ 이므로 $m+n=44$ 이다.

15. [출제의도] 삼각함수의 그래프를 이용하여 문제 해결하기

$f(0)=a\cos 0+a=2a$ 이므로 점 A 의 좌표는

$(0, 2a)$ 이다. $-\frac{3}{2}\pi\leq x\leq \frac{3}{2}\pi$ 에서 직선 $y=\frac{a}{2}$ 와

함수 $y=a\cos \frac{2}{3}x+a$ 의 그래프가 만나는 두 점의

x 좌표는 방정식 $a\cos \frac{2}{3}x+a=\frac{a}{2}$ 의 실근과 같다.

$$a\cos \frac{2}{3}x+a=\frac{a}{2}, \cos \frac{2}{3}x=-\frac{1}{2} \text{ 에서}$$

$x=-\pi$ 또는 $x=\pi$ 이므로 점 B 와 C 의 좌표는

각각 $\left(-\pi, \frac{a}{2}\right), \left(\pi, \frac{a}{2}\right)$ 이다.

삼각형 ABC 는 정삼각형이므로

$$\overline{AC}\times \sin \frac{\pi}{3}=2\pi\times \frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3}{2}a$$

$$\text{따라서 } a=\frac{2\sqrt{3}}{3}\pi$$

16. [출제의도] 로그함수의 그래프를 이용하여 명제 추론하기

ㄱ. $t=1$ 일 때, $P(2, 1), Q(4, 1)$ 이므로

$$S(1)=\frac{1}{2}\times (4-2)\times 1=1 \text{ (참)}$$

ㄴ. $t=2$ 일 때, $P(4, 2), Q(16, 2)$ 이므로

$$S(2)=\frac{1}{2}\times (16-4)\times 2=12$$

$t=-2$ 일 때, $P\left(\frac{1}{4}, -2\right), Q\left(\frac{1}{16}, -2\right)$ 이므로

$$S(-2)=\frac{1}{2}\times \left(\frac{1}{4}-\frac{1}{16}\right)\times 2=\frac{3}{16}$$

따라서 $S(2)=64\times S(-2)$ (참)

ㄷ. 0 이 아닌 모든 실수 t 에 대하여

$P(2^t, t), Q(4^t, t)$ 이다. $t>0$ 일 때 $2^t<4^t$ 이므로

$$S(t)=\frac{1}{2}\times t\times (4^t-2^t)=\frac{t}{2}(4^t-2^t)$$

$$S(-t)=-\frac{t}{2}(4^{-t}-2^{-t})$$

$$\text{따라서 } \frac{S(t)}{S(-t)}=\frac{4^t-2^t}{2^{-t}-4^{-t}}=\frac{2^t(2^t-1)}{4^{-t}(2^t-1)}=8^t$$

이므로, t 의 값이 증가하면 $\frac{S(t)}{S(-t)}$ 의 값도 증가한다. (참)

17. [출제의도] 삼각함수의 정의를 이용하여 식의 값 구하는 문제 해결하기

점 $P(t, \sqrt{t})$ ($t>0$)에 대하여 $\overline{OP}=\sqrt{t^2+t}$ 이므로

$$\sin\theta=\frac{\sqrt{t}}{\sqrt{t^2+t}}, \cos\theta=\frac{t}{\sqrt{t^2+t}} \text{ 이다.}$$

$$\cos^2\theta-2\sin^2\theta=\frac{t^2}{t^2+t}-\frac{2t}{t^2+t}=-1 \text{ 에서}$$

$$t^2-2t=-t^2-t, t(2t-1)=0$$

$t>0$ 이므로 $t=\frac{1}{2}$ 이고 점 P 는 $P\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ 이다.

$$\text{따라서 } \overline{OP}=\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

18. [출제의도] 지수함수가 포함된 방정식 문제 해결하기

두 직선 $y=k$, $y=2k$ 와 곡선 $y=2^{x+1}$ 이 만나는 점을 각각 구하면 $2^{x+1}=k$ 에서 $x=\log_2 k-1$ 이고 $2^{x+1}=2k$ 에서 $x=\log_2 k$ 이므로 점 D, F의 좌표는 각각 $(\log_2 k-1, k)$, $(\log_2 k, 2k)$ 이다.
두 곡선 $y=2^{x+1}$ 과 $y=2^{-x+1}$ 은 y 축에 대하여 대칭이므로 점 E, G의 좌표는 각각 $(1-\log_2 k, k)$, $(-\log_2 k, 2k)$ 이다.
삼각형 CFG의 넓이는 $\frac{1}{2}\{\log_2 k - (-\log_2 k)\} \times (2k-2) = 2(k-1)\log_2 k$ 이고 사각형 ABED의 넓이는 $\frac{1}{2}\{[1-\log_2 k - (\log_2 k-1)]+2\} \times (k-1) = (2-\log_2 k)(k-1)$ 이다. $1 < k < 2$ 이고 삼각형 CFG의 넓이와 사각형 ABED의 넓이가 같으므로 $2(k-1)\log_2 k = (2-\log_2 k)(k-1)$
 $2\log_2 k = 2-\log_2 k$
 $\log_2 k = \frac{2}{3}$ 이다. 따라서 $k=2^{\frac{2}{3}}$

19. [출제의도] 삼각함수를 활용하여 넓이 추론하기

$\angle CAB=\theta$ 이므로 $\angle COB=2\theta$ 이다. 삼각형 POB가 이등변삼각형이고 $\angle OQB=\frac{\pi}{2}$ 이므로 점 Q는 선분 PB의 중점이고 $\angle POQ=2\theta$ 이다. 선분 PO와 선분 QD가 평행하므로 삼각형 POB와 삼각형 QDB는 닮음이다. 따라서 $\overline{QD}=\boxed{1}$ 이고 $\angle QDB=\boxed{4\theta}$ 이므로 $S(\theta)=\frac{1}{2}\times\boxed{1}\times 1\times\sin(\boxed{4\theta})$ 이다. $\overline{CQ}=\overline{CO}-\overline{QO}$ 이므로 $T(\theta)=\frac{1}{2}\times\overline{PQ}\times\overline{CQ}=\sin 2\theta\times(2-\boxed{2\cos 2\theta})$ 이다. $p=1$, $f(\theta)=4\theta$, $g(\theta)=2\cos 2\theta$ 이므로 $p\times f\left(\frac{\pi}{16}\right)\times g\left(\frac{\pi}{8}\right)=1\times\frac{\pi}{4}\times\sqrt{2}=\frac{\sqrt{2}}{4}\pi$

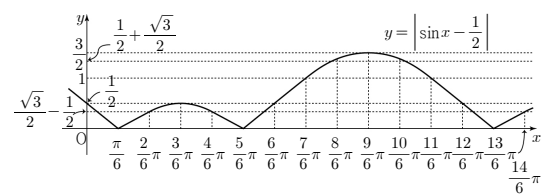
20. [출제의도] 로그의 성질을 이용하여 최댓값을 구하는 문제 해결하기

조건 (나)에서 $\log_a b=\frac{n}{m}$ (m 과 n 은 서로소인 자연수)라 하면 $b=a^{\frac{n}{m}}$ 이다.
 $\log a < \frac{3}{2}$ 에서 $a < 10^{\frac{3}{2}}$ 이고, 조건 (가)에서 $1 < a < a^{\frac{n}{m}} < a^2 < 1000$ 이다.
(i) $m=1$ 일 때, $1 < a < a^n < a^2 < 1000$ 을 만족시키는 자연수 n 은 존재하지 않는다.
(ii) $m=2$ 일 때, $1 < a < a^{\frac{n}{2}} < a^2 < 1000$ 을 만족시키는 자연수 n 은 3이고, a , b 는 자연수이므로 $1 < a < a^{\frac{3}{2}} < a^2 < 1000$ 을 만족시키는 순서쌍 (a, b) 는 $(4, 8)$, $(9, 27)$, $(16, 64)$, $(25, 125)$ 이다.
(iii) $m=3$ 일 때, $1 < a < a^{\frac{n}{3}} < a^2 < 1000$ 을 만족시키는 자연수 n 은 4, 5이다.
① $m=3$, $n=4$ 일 때, a , b 는 자연수이므로 $1 < a < a^{\frac{4}{3}} < a^2 < 1000$ 을 만족시키는 순서쌍 (a, b) 는 $(8, 16)$, $(27, 81)$ 이다.
② $m=3$, $n=5$ 일 때, a , b 는 자연수이므로 $1 < a < a^{\frac{5}{3}} < a^2 < 1000$ 을 만족시키는 순서쌍 (a, b) 는 $(8, 32)$, $(27, 243)$ 이다.

(iv) $m=4$ 일 때, $1 < a < a^{\frac{n}{4}} < a^2 < 1000$ 을 만족시키는 자연수 n 은 5, 7이다.
① $m=4$, $n=5$ 일 때, a , b 는 자연수이므로 $1 < a < a^{\frac{5}{4}} < a^2 < 1000$ 을 만족시키는 순서쌍 (a, b) 는 $(16, 32)$ 이다.
② $m=4$, $n=7$ 일 때, a , b 는 자연수이므로 $1 < a < a^{\frac{7}{4}} < a^2 < 1000$ 을 만족시키는 순서쌍 (a, b) 는 $(16, 128)$ 이다.
(v) $m\geq 5$ 일 때, $1 < a < a^{\frac{n}{m}} < a^2 < 1000$ 에서 $a^{\frac{n}{m}}$ 이 자연수이므로 $a\geq 2^5$ 이고 $a^2\geq 2^{10}=1024$ 이다.

그러므로 $1 < a < a^{\frac{n}{m}} < a^2 < 1000$ 을 만족시키는 자연수 a 는 존재하지 않는다.
따라서 (i)~(v)에서 $a+b$ 의 최댓값은 $27+243=270$ 이다.
[다른 풀이]
 $\log a < \frac{3}{2}$ 에서 $a^2 < 10^3$, $1 < a < b < a^2 < 10^3$
 $\log_a b = \frac{n}{m}$ (m , n 은 서로소인 자연수), $a^n = b^m$ 에서 $a = c^m$, $b = c^n$ (c 는 2 이상의 자연수)라 하자.
 $a^2 < 1000$ 이므로 $1 < c^m < c^n < c^{2m} < 1000$, $m=2, 3, 4$ 이다.
(i) $m=2$ 일 때, $n=3$ 이고 $c=2, 3, 4, 5$ 이므로 $a+b=c^m+c^n\leq 5^2+5^3=150$
(ii) $m=3$ 일 때, $n=4, 5$ 이고 $c=2, 3$ 이므로 $a+b=c^m+c^n\leq 3^3+3^5=270$
(iii) $m=4$ 일 때, $n=5, 7$ 이고 $c=2$ 이므로 $a+b=c^m+c^n\leq 2^4+2^7=144$
(iv) $m\geq 5$ 일 때, $c^{2m} < 1000$ 인 자연수 c 가 존재하지 않으므로 (가)와 (나)를 만족시키는 자연수 a 와 b 는 존재하지 않는다.
따라서 (i)~(iv)에서 $a+b$ 의 최댓값은 270이다.

21. [출제의도] 삼각함수의 그래프를 활용하여 최댓값 추론하기



함수 $y=f(x)$ 의 주기는 2π 이다.
 $n=1$ 일 때, $0\leq x\leq\frac{3}{6}\pi$ 에서 $g(1)=\frac{1}{2}$ 이다.
 $n=2$ 일 때, $\frac{\pi}{6}\leq x\leq\frac{4}{6}\pi$ 에서 $g(2)=\frac{1}{2}$ 이다.
 $n=3$ 일 때, $\frac{2}{6}\pi\leq x\leq\frac{5}{6}\pi$ 에서 $g(3)=\frac{1}{2}$ 이다.
 $n=4$ 일 때, $\frac{3}{6}\pi\leq x\leq\frac{6}{6}\pi$ 에서 $g(4)=\frac{1}{2}$ 이다.
 $n=5$ 일 때, $\frac{4}{6}\pi\leq x\leq\frac{7}{6}\pi$ 에서 $g(5)=1$ 이다.
 $n=6$ 일 때, $\frac{5}{6}\pi\leq x\leq\frac{8}{6}\pi$ 에서 $g(6)=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}$ 이다.
 $n=7$ 일 때, $\frac{6}{6}\pi\leq x\leq\frac{9}{6}\pi$ 에서 $g(7)=\frac{3}{2}$ 이다.
 $n=8$ 일 때, $\frac{7}{6}\pi\leq x\leq\frac{10}{6}\pi$ 에서 $g(8)=\frac{3}{2}$ 이다.
 $n=9$ 일 때, $\frac{8}{6}\pi\leq x\leq\frac{11}{6}\pi$ 에서 $g(9)=\frac{3}{2}$ 이다.

$n=10$ 일 때, $\frac{9}{6}\pi\leq x\leq\frac{12}{6}\pi$ 에서 $g(10)=\frac{3}{2}$ 이다.
 $n=11$ 일 때, $\frac{10}{6}\pi\leq x\leq\frac{13}{6}\pi$ 에서 $g(11)=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}$ 이다.
 $n=12$ 일 때, $\frac{11}{6}\pi\leq x\leq\frac{14}{6}\pi$ 에서 $g(12)=1$ 이다.
따라서 $1\leq n\leq 12$ 에서 $g(n)$ 이 무리수인 n 은 6, 11이다. 함수 $f(x)$ 의 주기는 2π 이므로 자연수 m 에 대하여 $\frac{n-1}{6}\pi\leq x\leq\frac{n+2}{6}\pi\cdots$ ①
 $\frac{n-1}{6}\pi+2m\pi\leq x\leq\frac{n+2}{6}\pi+2m\pi$,
 $\frac{n+12m-1}{6}\pi\leq x\leq\frac{n+12m+2}{6}\pi\cdots$ ②
①, ②에서 $f(x)$ 의 최댓값은 서로 같다.
따라서 $g(n)=g(n+12m)$ 이다.
 $g(6)=g(18)=g(30)$, $g(11)=g(23)=g(35)$ 이므로 40 이하의 자연수 k 에 대하여 $g(k)$ 가 무리수가 되도록 하는 모든 k 의 값의 합은 $6+11+18+23+30+35=123$ 이다.

22. [출제의도] 지수 계산하기

$$\sqrt[3]{27^2}\times 3^2=27^{\frac{2}{3}}\times 3^2=(3^3)^{\frac{2}{3}}\times 3^2=3^2\times 3^2=81$$

23. [출제의도] 로그함수가 포함된 방정식의 해 계산하기

진수 조건에 의해 $x>-3$ 이고 $\log_{\frac{1}{2}}(x+3)=-4$ 에서 $x+3=\left(\frac{1}{2}\right)^{-4}=16$ 이므로 $x=13$ 이다.

24. [출제의도] 삼각함수의 그래프의 주기 이해하기

함수 $y=\cos\frac{2}{3}x$ 의 주기는 $\frac{2\pi}{\frac{2}{3}}=3\pi$

함수 $y=\tan\frac{3}{a}x$ 의 주기는 $\frac{\pi}{\frac{3}{a}}=\frac{a\pi}{3}$

두 함수의 주기가 같으므로 $3\pi=\frac{a\pi}{3}$
따라서 $a=9$

25. [출제의도] 삼각함수의 그래프 이해하기

함수 $f(x)=4\cos(x+\pi)+k$ 의 그래프가 점 $\left(\frac{\pi}{3}, 5\right)$ 를 지나므로 $5=4\cos\left(\frac{\pi}{3}+\pi\right)+k=4\times\left(-\cos\frac{\pi}{3}\right)+k$ 이다. 따라서 $-2+k=5$ 이므로 $k=7$ 이다.

26. [출제의도] 지수법칙을 이용하여 문제 해결하기

$3^a+3^{-a}=t$ 라 하면 $3^a+3^{-a}\geq 2\sqrt{3^a\times 3^{-a}}=2$ 이므로 $t\geq 2$ 이다.
 $t^2=2t+8$ 에서 $(t-4)(t+2)=0$ 이고 $t\geq 2$ 이므로 $t=4$ 이다.
 $27^a+27^{-a}=(3^a+3^{-a})^3-3(3^a+3^{-a})=t^3-3t=64-12=52$

27. [출제의도] 로그의 정의를 이용하여 집합 문제 해결하기

집합 B 의 원소는 모두 자연수이므로 a, b, c 는 모두 2^k (k 는 자연수)의 꼴이다.
 $a+b=24$ 이므로 $\{a, b\}=\{8, 16\}$ 이고 $A=\{8, 16, c\}$, $B=\{3, 4, \log_2 c\}$ 이다.
집합 B 의 모든 원소의 합이 12이므로 $\log_2 c=5$ 이고 $c=2^5=32$ 이다.

따라서 집합 A 의 모든 원소의 합은
 $8+16+32=56$ 이다.

28. [출제의도] 삼각함수가 포함된 방정식 문제 해결하기

자연수 n 에 대하여 $0 \leq x \leq 4$ 일 때, x 에 대한

방정식 $\sin \pi x - \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 0$ 의 실근의 합은

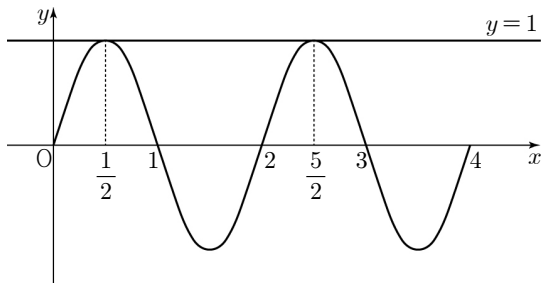
함수 $y = \sin \pi x$ 의 그래프가 직선 $y = \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ 과

만나는 점의 x 좌표의 합과 같다. 함수 $y = \sin \pi x$ 의
주기는 2이다.

(i) $n=1$ 일 때, 함수 $y = \sin \pi x$ 의 그래프가

직선 $y=1$ 과 만나는 점의 x 좌표는 $\frac{1}{2}, \frac{5}{2}$ 이므로

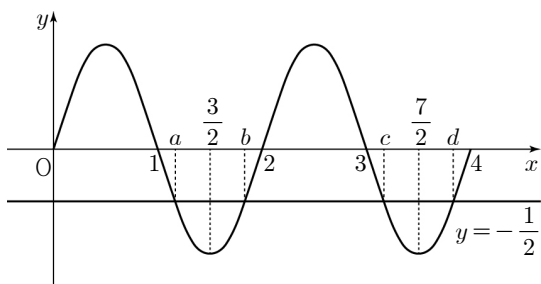
$f(1)=3$ 이다.



(ii) $n=2$ 일 때, 함수 $y = \sin \pi x$ 의 그래프가

직선 $y = -\frac{1}{2}$ 과 만나는 점의 x 좌표를 a, b, c, d

라 하면 $\frac{a+b}{2} = \frac{3}{2}, \frac{c+d}{2} = \frac{7}{2}$ 에서 $f(2)=10$ 이다.

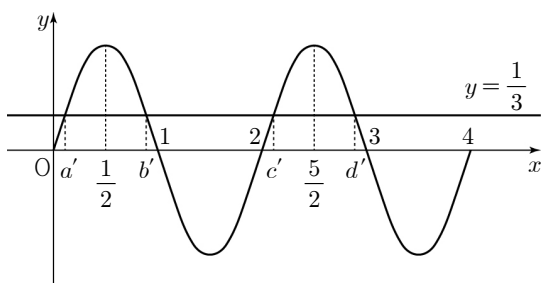


(iii) $n=3$ 일 때, 함수 $y = \sin \pi x$ 의 그래프가

직선 $y = \frac{1}{3}$ 과 만나는 점의 x 좌표를 a', b', c', d'

이라 하면 $\frac{a'+b'}{2} = \frac{1}{2}, \frac{c'+d'}{2} = \frac{5}{2}$ 에서

$f(3)=6$ 이다.



(iv) $n \geq 4$ 일 때, (ii), (iii)과 같은 방법으로 n 이
짝수일 때 $f(n)=10$, n 이 1이 아닌 홀수일 때
 $f(n)=6$ 이다. 따라서 $f(1)+f(2)+f(3)+f(4)+f(5)$
 $=3+10+6+10+6=35$

29. [출제의도] 사인법칙을 이용하여 선분의 길이 구하는
문제 해결하기

$\overline{DF}=x$, $\angle CDF=\theta$ 라 하면 $\angle BDE=\frac{\pi}{2}-\theta$ 이고

$\overline{AE}=\overline{DE}$ 이므로 $\overline{BE}=1-\overline{AE}=1-\overline{DE}$ 이다.

같은 방법으로

$\overline{AF}=\overline{DF}$ 이므로 $\overline{CF}=1-\overline{AF}=1-\overline{DF}$ 이다.

삼각형 BDE와 삼각형 DCF의 외접원의 반지름의
길이를 각각 r_1, r_2 라 하면 사인법칙에 의해

$$\text{삼각형 BDE에서 } \frac{1-\overline{DE}}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)} = \frac{\overline{DE}}{\sin\frac{\pi}{4}} = 2r_1 \dots \textcircled{1}$$

$$\text{삼각형 CDF에서 } \frac{1-\overline{DF}}{\sin\theta} = \frac{\overline{DF}}{\sin\frac{\pi}{4}} = 2r_2 \dots \textcircled{2}$$

이 성립한다.

$r_1=2r_2$ 이므로 $\overline{DE}=2\overline{DF}=2x$ 이고

$$\textcircled{1}\text{에서 } \frac{\sqrt{2}}{2}(1-2x) = 2x \sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) = 2x \cos\theta$$

$$\textcircled{2}\text{에서 } \frac{\sqrt{2}}{2}(1-x) = x \sin\theta \text{이므로}$$

두 식의 양변을 제곱하여 연립하면

$$(1-2x)^2 + 4(1-x)^2 = 8x^2(\sin^2\theta + \cos^2\theta) = 8x^2$$

$$x = \frac{5}{12}$$

따라서 $p=12, q=5$ 이므로 $p+q=17$ 이다.

[다른 풀이]

$\angle AED=\theta$ 라 두면 $\angle AFD=\pi-\theta$ 이고

$\angle BED=\pi-\theta, \angle CFD=\theta$ 이다.

삼각형 BDE와 삼각형 DCF의 외접원의 반지름의
길이를 각각 r_1, r_2 라 하면 사인법칙에 의해

$$\text{삼각형 BDE에서 } \frac{\overline{BD}}{\sin(\pi-\theta)} = \frac{\overline{BD}}{\sin\theta} = 2r_1$$

$$\overline{BD}=2r_1 \sin\theta \dots \textcircled{1}$$

$$\text{삼각형 DCF에서 } \frac{\overline{CD}}{\sin\theta} = 2r_2$$

$$\overline{CD}=2r_2 \sin\theta \dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 에 의해 $\overline{BD}:\overline{CD}=r_1:r_2=2:1$ 이다.

$\overline{AB}=\overline{AC}=1, \angle BAC=\frac{\pi}{2}$ 에서 $\overline{BC}=\sqrt{2}$ 이므로

$$\overline{CD}=\frac{\sqrt{2}}{3} \text{이다.}$$

$\overline{DF}=x$ 라 두면 $\overline{CF}=1-x$ 가 되어

삼각형 DCF에서 코사인법칙에 의해

$$x^2 = (1-x)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^2 - 2(1-x) \times \frac{\sqrt{2}}{3} \cos\frac{\pi}{4}$$

$$x = \frac{5}{12}$$

따라서 $p=12, q=5$ 이므로 $p+q=17$ 이다.

30. [출제의도] 지수함수의 그래프 추론하기

$$f(x) = \begin{cases} -x+k-4 & (x < k) \\ x-k-4 & (x \geq k) \end{cases}$$

이며 $k-4 < x < k+4$ 일 때 $f(x) < 0$ 이고,

$x \leq k-4$ 또는 $x \geq k+4$ 일 때 $f(x) \geq 0$ 이다.

따라서 $g(x)$ 는

$$g(x) = \begin{cases} a^{-f(x)} & (k-4 < x < k+4) \\ a^{f(x)} & (x \leq k-4 \text{ 또는 } x \geq k+4) \end{cases}$$

$$= \begin{cases} a^{-x+k-4} & (x \leq k-4) \\ a^{x-k+4} & (k-4 < x < k) \\ a^{-x+k+4} & (k \leq x < k+4) \\ a^{x-k-4} & (x \geq k+4) \end{cases}$$

이다.

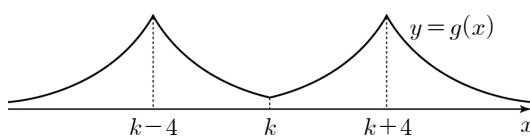
(i) $0 < a < 1$ 일 때

함수 $y=a^x$ 은 x 의 값이 증가할 때 y 의 값은 감소
한다. 따라서 함수 $g(x)$ 는

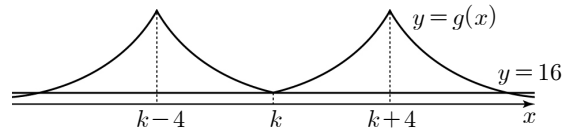
$k-4 < x < k$ 또는 $x \geq k+4$ 일 때 $f(x)$ 의 값이
증가하므로 $g(x)$ 의 값은 감소하고,

$x \leq k-4$ 또는 $k \leq x < k+4$ 일 때 $f(x)$ 의 값이
감소하므로 $g(x)$ 의 값은 증가한다.

따라서 함수 $y=g(x)$ 의 그래프는 다음과 같다.



함수 $y=g(x)$ 의 그래프와 직선 $y=16$ 의 교점의
개수가 3이므로 $g(k)=16$ 이다.



$g(k)=a^4=16$ 에서 $a=2$ 가 되어 조건을 만족시키지
않는다.

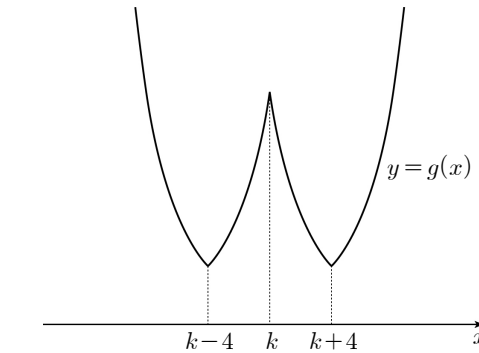
(ii) $a > 1$ 일 때

함수 $y=a^x$ 은 x 의 값이 증가할 때 y 의 값도 증가
한다. 따라서 함수 $g(x)$ 는

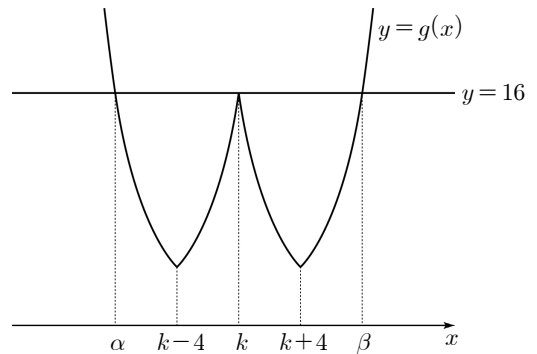
$k-4 < x < k$ 또는 $x \geq k+4$ 일 때 $f(x)$ 의 값이
증가하므로 $g(x)$ 의 값도 증가하고,

$x \leq k-4$ 또는 $k \leq x < k+4$ 일 때 $f(x)$ 의 값이
감소하므로 $g(x)$ 의 값도 감소한다.

따라서 함수 $y=g(x)$ 의 그래프는 다음과 같다.



함수 $y=g(x)$ 의 그래프와 직선 $y=16$ 의 교점의 개
수가 3이므로 $g(k)=16$ 이다.



$g(k)=a^4=16$ 에서 $a=2$ 이다.

함수 $y=g(x)$ 의 그래프와 직선 $y=16$ 의 서로 다른
세 교점의 x 좌표를 α, k, β 라 두면 ($\alpha < k < \beta$)

$g(1)=16$ 이므로 다음과 같은 세 가지 경우로 나눌
수 있다.

$\textcircled{1} \alpha=1$ 일 때, $g(1)=g(k)=g(\beta)$ 이므로

$$2^{-1+k-4} = 2^4 = 2^{\beta-k-4}$$

$$-1+k-4=4$$

따라서 $k=9$ 이므로 $f(x)=|x-9|-4$ 이다.

$\textcircled{2} k=1$ 일 때, $f(x)=|x-1|-4$ 이다.

$\textcircled{3} \beta=1$ 일 때, $g(\alpha)=g(k)=g(1)$ 이므로

$$2^{-\alpha+k-4} = 2^4 = 2^{1-k-4}$$

$$4=1-k-4$$

따라서 $k=-7$ 이므로 $f(x)=|x+7|-4$ 이다.

(i), (ii)에 의해 $a=2$ 이므로 $f(a-2)=f(0)$ 이고

$\textcircled{1}, \textcircled{2}, \textcircled{3}$ 에서 모든 $f(0)$ 의 값의 합은 $5-3+3=5$
이다.