

● 수학 영역 ●

정답

1	③	2	④	3	③	4	④	5	②
6	①	7	②	8	⑤	9	①	10	④
11	①	12	⑤	13	②	14	③	15	②
16	10	17	22	18	110	19	102	20	24
21	6	22	29						

해설

1. [출제의도] 지수법칙을 이용하여 값을 계산한다.

$$2^{\sqrt{2}} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{2}-1} = 2^{\sqrt{2}} \times 2^{-\sqrt{2}+1} = 2^{\sqrt{2}-\sqrt{2}+1} = 2$$

2. [출제의도] 도함수를 이용하여 미분계수를 계산한다.

$$f'(x) = 6x^2 + 3 \text{ 이므로}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2h) - f(0)}{2h} \times 2 = 2f'(0) = 2 \times 3 = 6$$

3. [출제의도] 등차수열과 등비수열의 항을 구한다.

$$a_2 = b_2 \text{에서 } a_1 + 3 = b_1 \times 2$$

$$\text{즉 } a_1 - 2b_1 = -3 \dots\dots \textcircled{1}$$

$$a_4 = b_4 \text{에서 } a_1 + 3 \times 3 = b_1 \times 2^3$$

$$\text{즉 } a_1 - 8b_1 = -9 \dots\dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{을 연립하여 풀면 } a_1 = -1, b_1 = 1$$

$$\text{따라서 } a_1 + b_1 = 0$$

4. [출제의도] 사잇값의 정리를 이용하여 함숫값을 구한다.

$$\text{방정식 } f(x) = 0 \text{의 실근은 } 0, m, n \text{이고}$$

$$m, n \text{은 자연수이므로 사잇값의 정리에 의하여}$$

$$f(1)f(3) < 0 \text{에서 } f(2) = 0$$

$$f(3)f(5) < 0 \text{에서 } f(4) = 0$$

$$f(x) = x(x-2)(x-4) \text{이므로 } f(6) = 6 \times 4 \times 2 = 48$$

5. [출제의도] 삼각함수의 성질을 이용하여 삼각함수의 값을 구한다.

$$\frac{1}{1 - \cos \theta} + \frac{1}{1 + \cos \theta} = \frac{2}{1 - \cos^2 \theta} = \frac{2}{\sin^2 \theta} = 18$$

$$\sin^2 \theta = \frac{1}{9} \text{이고 } \pi < \theta < \frac{3}{2}\pi \text{에서 } \sin \theta < 0 \text{이므로}$$

$$\sin \theta = -\frac{1}{3}$$

6. [출제의도] 정적분을 활용하여 넓이를 구한다.

$$\text{구하는 부분의 넓이는}$$

$$\int_0^3 \left(\frac{1}{3}x^2 + 1\right) dx = \left[\frac{1}{9}x^3 + x\right]_0^3 = 3 + 3 = 6$$

7. [출제의도] 등차수열의 성질을 이용하여 등차수열의 항을 구한다.

$$S_7 - S_4 = a_5 + a_6 + a_7 = 0$$

$$\text{수열 } \{a_n\} \text{이 등차수열이므로 공차를 } d \text{라 하면}$$

$$a_5 = a_6 - d, a_7 = a_6 + d \text{에서}$$

$$(a_6 - d) + a_6 + (a_6 + d) = 3a_6 = 0, \text{ 즉 } a_6 = 0$$

$$S_6 = 30 \text{이므로}$$

$$S_6 = \frac{6(a_1 + a_6)}{2} = 3a_1 = 30$$

$$a_1 = 10$$

$$a_6 = 10 + 5d = 0 \text{이므로 } d = -2$$

$$\text{따라서 } a_2 = a_1 + d = 10 - 2 = 8$$

8. [출제의도] 도함수를 활용하여 부등식이 성립할 조건을 구한다.

$$f(x) \leq g(x) \text{에서 } g(x) - f(x) \geq 0$$

$$\text{즉 } x^4 + \frac{4}{3}x^3 - 4x^2 + a \geq 0$$

$$h(x) = x^4 + \frac{4}{3}x^3 - 4x^2 + a \text{라 하면 } h(x) \geq 0$$

$$h'(x) = 4x^3 + 4x^2 - 8x = 4x(x-1)(x+2)$$

$$h'(x) = 0 \text{에서 } x = -2 \text{ 또는 } x = 0 \text{ 또는 } x = 1$$

$$\text{함수 } h(x) \text{의 증가와 감소를 나타내면 다음과 같다.}$$

$x$	$\cdots$	$-2$	$\cdots$	$0$	$\cdots$	$1$	$\cdots$
$h'(x)$	$-$	$0$	$+$	$0$	$-$	$0$	$+$
$h(x)$	$\searrow$	$a - \frac{32}{3}$	$\nearrow$	$a$	$\searrow$	$a - \frac{5}{3}$	$\nearrow$

$$\text{함수 } h(x) \text{는 } x = -2 \text{에서 최솟값 } a - \frac{32}{3} \text{를 갖는다.}$$

$$a - \frac{32}{3} \geq 0 \text{에서 } a \geq \frac{32}{3}$$

$$\text{따라서 실수 } a \text{의 최솟값은 } \frac{32}{3} \text{이다.}$$

9. [출제의도] 거듭제곱근의 정의를 이해한다.

$$n \text{이 홀수이면 } n^2 - 16n + 48 \text{의 } n \text{제곱근 중 실수인 것의 개수는 항상 } 1 \text{이므로}$$

$$f(3) = f(5) = f(7) = f(9) = 1$$

$$n \text{이 짝수이면 } n^2 - 16n + 48 \text{의 값에 따라 다음과 같은 경우로 나누어 생각할 수 있다.}$$

$$(i) n^2 - 16n + 48 > 0 \text{인 경우}$$

$$(n-4)(n-12) > 0 \text{에서 } n < 4 \text{ 또는 } n > 12$$

$$\text{이때 } f(n) = 2 \text{이므로}$$

$$f(2) = 2$$

$$(ii) n^2 - 16n + 48 = 0 \text{인 경우}$$

$$(n-4)(n-12) = 0 \text{에서 } n = 4 \text{ 또는 } n = 12$$

$$\text{이때 } f(n) = 1 \text{이므로}$$

$$f(4) = 1$$

$$(iii) n^2 - 16n + 48 < 0 \text{인 경우}$$

$$(n-4)(n-12) < 0 \text{에서 } 4 < n < 12$$

$$\text{이때 } f(n) = 0 \text{이므로}$$

$$f(6) = f(8) = f(10) = 0$$

$$\text{따라서 } \sum_{n=2}^{10} f(n) = 4 \times 1 + 1 \times 2 + 1 \times 1 + 3 \times 0 = 7$$

10. [출제의도] 함수의 극한을 활용하여 문제를 해결한다.

$$\text{두 점 A, B의 } x \text{좌표를 각각 } \alpha, \beta (\alpha < \beta) \text{라 하면}$$

$$\alpha, \beta \text{는 이차방정식 } x^2 - tx - 1 = tx + t + 1,$$

$$\text{즉 } x^2 - 2tx - 2 - t = 0 \text{의 두 실근이므로}$$

$$\alpha = t - \sqrt{t^2 + t + 2}, \beta = t + \sqrt{t^2 + t + 2}$$

$$\beta - \alpha = 2\sqrt{t^2 + t + 2} \text{이고}$$

$$\text{직선 AB의 기울기가 } t \text{이므로}$$

$$\overline{AB} = 2\sqrt{t^2 + t + 2} \sqrt{t^2 + 1}$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\overline{AB}}{t^2} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{2\sqrt{(t^2 + t + 2)(t^2 + 1)}}{t^2}$$

$$= 2 \lim_{t \rightarrow \infty} \sqrt{\left(1 + \frac{1}{t} + \frac{2}{t^2}\right) \left(1 + \frac{1}{t^2}\right)} = 2$$

11. [출제의도] 삼각함수의 그래프의 성질을 활용하여 문제를 해결한다.

$$\text{삼각형 AOB의 넓이가 } \frac{1}{2} \times \overline{AB} \times 5 = \frac{15}{2} \text{이므로}$$

$$\overline{AB} = 3, \text{ 이때 } \overline{BC} = \overline{AB} + 6 = 9$$

$$\text{함수 } y = f(x) \text{의 주기가 } 2b \text{이므로}$$

$$2b = \overline{AC} = \overline{AB} + \overline{BC} = 12, b = 6$$

$$\text{선분 AB의 중점의 } x \text{좌표가 } 3 \text{이므로}$$

$$\text{점 A의 좌표는 } \left(\frac{3}{2}, 5\right) \text{이다.}$$

$$\text{점 A는 곡선 } y = f(x) \text{ 위의 점이므로}$$

$$f\left(\frac{3}{2}\right) = 5 \text{에서 } a \sin \frac{\pi}{4} + 1 = 5, a = 4\sqrt{2}$$

$$\text{따라서 } a^2 + b^2 = (4\sqrt{2})^2 + 6^2 = 32 + 36 = 68$$

12. [출제의도] 도함수를 활용하여 함수를 추론한다.

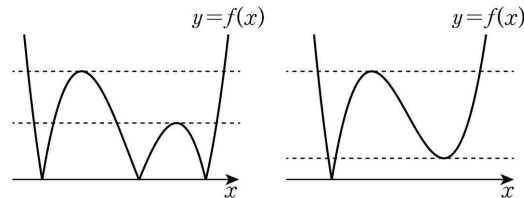
$$g(x) = x^3 - 12x + k \text{라 하면 } f(x) = |g(x)|$$

$$g'(x) = 3x^2 - 12 = 3(x+2)(x-2)$$

$$g'(x) = 0 \text{에서 } x = -2 \text{ 또는 } x = 2$$

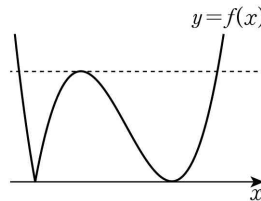
$$\text{함수 } g(x) \text{가 } x = -2 \text{에서 극댓값 } k+16, x = 2 \text{에서 극솟값 } k-16 \text{을 가지므로 } k \text{의 값에 따라 다음과 같은 경우로 나누어 생각할 수 있다.}$$

$$(i) 0 < k < 16 \text{ 또는 } k > 16 \text{인 경우}$$



$$\text{함수 } y = f(x) \text{의 그래프와 직선 } y = a \text{가 만나서 서로 다른 점의 개수가 홀수가 되는 실수 } a \text{의 값이 3개 존재하므로 조건을 만족시키지 못한다.}$$

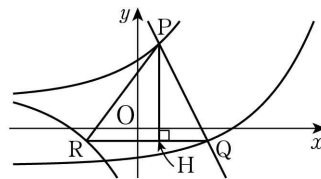
$$(ii) k = 16 \text{인 경우}$$



$$\text{함수 } y = f(x) \text{의 그래프와 직선 } y = a \text{가 만나서 서로 다른 점의 개수가 홀수가 되는 실수 } a \text{의 값이 오직 하나이다.}$$

$$(i), (ii) \text{에서 } k = 16$$

13. [출제의도] 지수함수를 이용하여 문제를 해결한다.



$$\text{점 P에서 직선 QR에 내린 수선의 발을 H라 하자.}$$

$$\overline{HQ} = t (t > 0) \text{이라 하면 직선 PQ의 기울기가}$$

$$-2 \text{이므로 } \overline{PH} = 2t \text{이고 } \overline{HR} = 5 - t \text{이다.}$$

$$\text{직각삼각형 PRH에서 피타고라스 정리에 의하여}$$

$$(5-t)^2 + (2t)^2 = 5^2, t(t-2) = 0, t = 2$$

$$\text{따라서 } \overline{PH} = 4, \overline{HR} = 3$$

$$\text{점 R의 } x \text{좌표를 } m \text{이라 하면 점 P의 } x \text{좌표는}$$

$$m+3, \text{ 점 Q의 } x \text{좌표는 } m+5 \text{이므로}$$

$$P(m+3, a^{m+4}+1), Q\left(m+5, a^{m+2}-\frac{7}{4}\right),$$

$$R\left(m, -a^{m+4}+\frac{3}{2}\right)$$

$$\text{점 P의 } y \text{좌표는 점 R의 } y \text{좌표보다 4만큼 크므로}$$

$$a^{m+4}+1 = \left(-a^{m+4}+\frac{3}{2}\right)+4$$

$$a^{m+4} = \frac{9}{4} \dots\dots \textcircled{1}$$

$$\text{점 Q의 } y \text{좌표와 점 R의 } y \text{좌표가 같으므로}$$

$$a^{m+2}-\frac{7}{4} = -a^{m+4}+\frac{3}{2}$$

$$\textcircled{1} \text{을 대입하여 정리하면 } a^{m+2} = 1$$

$$a > 1 \text{에서 } m+2 = 0 \text{이므로 } m = -2$$

$$\textcircled{1} \text{에서 } a^2 = \frac{9}{4}, a > 1 \text{이므로 } a = \frac{3}{2}$$

점 P  $\left(1, \frac{13}{4}\right)$ 이 직선  $y = -2x + k$  위의 점이므로

$$\frac{13}{4} = -2 \times 1 + k, \quad k = \frac{21}{4}$$

$$\text{따라서 } a + k = \frac{3}{2} + \frac{21}{4} = \frac{27}{4}$$

14. [출제의도] 정적분의 성질을 이용하여 함수를 추론한다.

$f'(2) = 0$ 이므로 실수  $k$ 에 대하여

$f(x) = x^2 - 4x + k$ 라 하자.

ㄱ. 만약  $f(2) \geq 0$ 이면  $x > 2$ 일 때  $f(x) > 0$ 이므로

정적분과 넓이의 관계에 의하여  $\int_2^4 f(x) dx > 0$ ,

즉  $\int_4^2 f(x) dx = -\int_2^4 f(x) dx < 0$ 이므로 주어진

조건을 만족시키지 못한다. 즉  $f(2) < 0$  (참)

$$\text{ㄴ. } \int_4^3 f(x) dx = \left[ \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + kx \right]_4^3 = -k + \frac{5}{3}$$

$$-k + \frac{5}{3} \geq 0 \text{이므로 } k \leq \frac{5}{3}$$

$$\int_4^2 f(x) dx = \left[ \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + kx \right]_4^2 = -2k + \frac{16}{3}$$

$$\int_4^3 f(x) dx - \int_4^2 f(x) dx = k - \frac{11}{3}$$

$$k \leq \frac{5}{3} \text{에서 } k - \frac{11}{3} \leq -2 < 0 \text{이므로}$$

$$\int_4^3 f(x) dx < \int_4^2 f(x) dx \quad (\text{거짓})$$

$$\text{ㄷ. } \text{ㄴ에서 } k \leq \frac{5}{3} \text{이므로 } f(3) = k - 3 \leq -\frac{4}{3} < 0$$

$f(3) = f(1) < 0$ 이므로 구간  $[1, 3]$ 에서

$f(x) < 0$ 이고,  $n = 1$  또는  $n = 2$ 일 때 곡선

$y = f(x)$ 와  $x$ 축 및 두 직선  $x = n$ ,  $x = 3$ 으로

둘러싸인 부분의 넓이가  $-\int_n^3 f(x) dx$ 와 같다.

$$\text{즉 } \int_3^n f(x) dx = -\int_n^3 f(x) dx > 0 \quad \cdots \cdots \text{㉑}$$

$$\int_4^5 f(x) dx = \left[ \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + kx \right]_4^5 = k + \frac{7}{3}$$

$$k + \frac{7}{3} \geq 0 \text{에서 } k \geq -\frac{7}{3} \text{이므로}$$

$$f(5) = 5 + k \geq \frac{8}{3} > 0$$

구간  $[5, \infty)$ 에서  $f(x) > 0$ 이다.

그러므로 6 이상의 모든 자연수  $n$ 에 대하여

곡선  $y = f(x)$ 와  $x$ 축 및 두 직선  $x = 5$ ,  $x = n$

으로 둘러싸인 부분의 넓이가  $\int_5^n f(x) dx$ 와 같

$$\text{다. 즉 } \int_5^n f(x) dx > 0 \quad \cdots \cdots \text{㉒}$$

$$\text{㉑, ㉒에서 } \int_4^3 f(x) dx \geq 0, \quad \int_4^5 f(x) dx \geq 0 \text{이면}$$

함수  $f(x)$ 가 주어진 조건을 만족시킨다.

$$\text{따라서 } -\frac{7}{3} \leq k \leq \frac{5}{3} \quad \cdots \cdots \text{㉓}$$

$$\int_4^6 f(x) dx = 2k + \frac{32}{3} \text{이므로 ㉓에서}$$

$$6 \leq \int_4^6 f(x) dx \leq 14 \quad (\text{참})$$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

15. [출제의도] 수열의 귀납적 정의를 이용하여 항의 값을 추론한다.

조건 (나)에서  $a_3 > a_5$ 이므로  $a_3$ 이 4의 배수인

경우와 4의 배수가 아닌 경우로 나누어 생각하자.

(i)  $a_3$ 이 4의 배수인 경우

$$a_3 = 4k \quad (k \text{는 자연수}) \text{라 하면 } a_4 = 2k + 6$$

$k$ 가 홀수일 때  $a_4$ 는 4의 배수이고

$$a_5 = k + 11, \quad a_4 + a_5 = 3k + 17 \text{이므로}$$

$$50 < 3k + 17 < 60, \quad a_3 > a_5 \text{에서 } k > \frac{11}{3}$$

$k$ 는 홀수이므로  $k = 13$ 이고  $a_3 = 52$

$k$ 가 짝수일 때  $a_4$ 는 4의 배수가 아니고

$$a_5 = 2k + 14, \quad a_4 + a_5 = 4k + 20 \text{이므로}$$

$$50 < 4k + 20 < 60, \quad a_3 > a_5 \text{에서 } k > 7$$

$k$ 는 짝수이므로  $k = 8$ 이고  $a_3 = 32$

$$\text{따라서 } a_3 = 52 \text{ 또는 } a_3 = 32$$

$$a_3 = 52 \text{인 경우 } a_2 = 96 \text{이고}$$

$$a_1 = 94 \text{ 또는 } a_1 = 188$$

$$a_3 = 32 \text{인 경우 } a_2 = 56 \text{이고}$$

$$a_1 = 54 \text{ 또는 } a_1 = 108$$

(ii)  $a_3$ 이 4의 배수가 아닌 경우

$$a_3 = 4k - 1 \text{ 또는 } a_3 = 4k - 3 \quad (k \text{는 자연수}) \text{일 때}$$

$a_3$ ,  $a_4$ ,  $a_5$ 는 모두 홀수이고

$$a_5 = a_4 + 8 = a_3 + 14 > a_3$$

이므로 조건 (나)를 만족시키지 못한다.

$a_3 = 4k - 2$  ( $k$ 는 자연수)일 때

$$a_4 = 4k + 4, \quad a_5 = 2k + 10 \text{이고}$$

$$a_4 + a_5 = 6k + 14 \text{이므로 } 50 < 6k + 14 < 60$$

$$a_3 > a_5 \text{에서 } k > 6, \text{ 이때 } k = 7 \text{이므로 } a_3 = 26$$

따라서  $a_2 = 22$  또는  $a_2 = 44$ 이다.

$$a_2 = 22 \text{인 경우 } a_1 = 40$$

$$a_2 = 44 \text{인 경우 } a_1 = 42 \text{ 또는 } a_1 = 84$$

(i), (ii)에서  $M = 188$ ,  $m = 40$ 이고  $M + m = 228$

16. [출제의도] 로그함수를 활용하여 방정식을 푼다.

로그의 진수의 조건에서  $x - 2 > 0$ ,  $x + 6 > 0$ 이므로  $x > 2$

주어진 방정식에서

$$\log_2(x - 2) = \log_4 4 + \log_4(x + 6)$$

$$\log_4(x - 2)^2 = \log_4 4(x + 6)$$

$$(x - 2)^2 = 4(x + 6)$$

$$x^2 - 8x - 20 = 0, \quad (x + 2)(x - 10) = 0$$

$$x > 2 \text{이므로 } x = 10$$

17. [출제의도] 곱의 미분법을 이용하여 미분계수의 값을 구한다.

곡선  $y = f(x)$  위의 점  $(3, 2)$ 에서의

접선의 기울기가 4이므로  $f(3) = 2$ ,  $f'(3) = 4$

$g(x) = (x + 2)f(x)$ 에서

$$g'(x) = f(x) + (x + 2)f'(x) \text{이므로}$$

$$g'(3) = f(3) + 5f'(3) = 2 + 5 \times 4 = 22$$

18. [출제의도]  $\sum$ 의 성질을 이해하여 수열의 합을 구한다.

$$\sum_{k=1}^{10} (a_k - b_k + 2) = 50 \text{에서}$$

$$\sum_{k=1}^{10} a_k - \sum_{k=1}^{10} b_k = 30 \quad \cdots \cdots \text{㉑}$$

$$\sum_{k=1}^{10} (a_k - 2b_k) = -10 \text{에서}$$

$$\sum_{k=1}^{10} a_k - 2 \sum_{k=1}^{10} b_k = -10 \quad \cdots \cdots \text{㉒}$$

$$\text{㉑, ㉒에서 } \sum_{k=1}^{10} a_k = 70, \quad \sum_{k=1}^{10} b_k = 40$$

$$\text{따라서 } \sum_{k=1}^{10} (a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{10} a_k + \sum_{k=1}^{10} b_k = 110$$

19. [출제의도] 정적분을 활용하여 수직선 위의 점이 움직인 거리를 구한다.

원점에서 출발한 점 P의 시각  $t = k$ 에서의 위치는

$$\int_0^k (12t - 12) dt = \left[ 6t^2 - 12t \right]_0^k = 6k^2 - 12k$$

원점에서 출발한 점 Q의 시각  $t = k$ 에서의 위치는

$$\int_0^k (3t^2 + 2t - 12) dt = \left[ t^3 + t^2 - 12t \right]_0^k = k^3 + k^2 - 12k$$

시각  $t = k$ 에서 두 점 P, Q의 위치가 같으므로

$$6k^2 - 12k = k^3 + k^2 - 12k, \quad k^2(k - 5) = 0$$

$$k > 0 \text{이므로 } k = 5$$

시각  $t = 0$ 에서  $t = 5$ 까지 점 P가 움직인 거리는

$$\begin{aligned} \int_0^5 |12t - 12| dt &= \int_0^1 (12 - 12t) dt + \int_1^5 (12t - 12) dt \\ &= \left[ 12t - 6t^2 \right]_0^1 + \left[ 6t^2 - 12t \right]_1^5 = 102 \end{aligned}$$

20. [출제의도] 정적분과 미분의 관계를 활용하여 문제를 해결한다.

$$2x^2 f(x) = 3 \int_0^x (x - t) \{f(x) + f(t)\} dt \text{에서}$$

$$2x^2 f(x) = 3 \int_0^x (x - t) f(x) dt + 3 \int_0^x (x - t) f(t) dt$$

$$= 3f(x) \int_0^x (x - t) dt + 3 \int_0^x (x - t) f(t) dt$$

$$= 3f(x) \left[ xt - \frac{1}{2}t^2 \right]_0^x + 3 \int_0^x (x - t) f(t) dt$$

$$= \frac{3}{2}x^2 f(x) + 3 \int_0^x (x - t) f(t) dt$$

$$x^2 f(x) = 6 \int_0^x (x - t) f(t) dt$$

$$x^2 f(x) = 6x \int_0^x f(t) dt - 6 \int_0^x t f(t) dt \quad \cdots \cdots \text{㉑}$$

㉑의 양변을  $x$ 에 대하여 미분하면

$$2xf(x) + x^2 f'(x) = 6 \int_0^x f(t) dt \quad \cdots \cdots \text{㉒}$$

$f'(2) = 4$ 이므로 다항함수  $f(x)$ 의 차수는 1 이상이 다. 함수  $f(x)$ 의 차수를  $n$ 이라 하고, 최고차항의 계수를  $a$  ( $a \neq 0$ )이라 하자.

㉒의 양변의 최고차항의 계수를 비교하면

$$a(2 + n) = \frac{6a}{n + 1}$$

$$(n + 1)(n + 2) = 6, \quad (n - 1)(n + 4) = 0$$

$n$ 은 자연수이므로  $n = 1$

함수  $f(x)$ 가 일차함수이고  $f'(2) = 4$ 이므로  $a = 4$

$f(x) = 4x + b$  (단,  $b$ 는 상수)라 하면 ㉒에서

$$2x(4x + b) + 4x^2 = 6 \left[ 2t^2 + bt \right]_0^x$$

$$12x^2 + 2bx = 12x^2 + 6bx \quad \cdots \cdots \text{㉓}$$

모든 실수  $x$ 에 대하여 ㉓이 성립하므로  $b = 0$

$$f(x) = 4x \text{이므로 } f(6) = 24$$

21. [출제의도] 사인법칙과 코사인법칙을 이용하여 삼각형에 관한 문제를 해결한다.

$$\angle CAE = \theta \text{라 하면 } \sin \theta = \frac{1}{4} \text{이고 } \overline{BC} = 4 \text{이므로}$$

삼각형 ACE에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{CE}}{\sin \theta} = \overline{BC}, \quad \overline{CE} = 1$$

$$\overline{BF} = \overline{CE} = 1 \text{이므로 } \overline{FC} = 3$$

$\overline{BC} = \overline{DE}$ 에서 선분 DE도 주어진 원의 지름이므로

$$\angle BAC = \angle DAE = 90^\circ \text{이다.}$$

$$\angle BAD = 90^\circ - \angle DAC = \theta$$

삼각형 ABF에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{k}{\sin(\angle ABF)} = \frac{1}{\sin \theta} = 4 \text{이므로 } \sin(\angle ABF) = \frac{k}{4}$$

$$\text{직각삼각형 ABC에서 } \sin(\angle ABC) = \frac{\overline{AC}}{4} \text{이므로}$$

$$\overline{AC} = 4 \sin(\angle ABC) = 4 \times \frac{k}{4} = k$$

직각삼각형 ABC에서  $\cos(\angle BCA) = \frac{k}{4}$  이므로

삼각형 AFC에서 코사인법칙에 의하여  
 $\overline{AF}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{FC}^2 - 2 \times \overline{AC} \times \overline{FC} \times \cos(\angle FCA)$

$$k^2 = k^2 + 3^2 - 2 \times k \times 3 \times \frac{k}{4}, \quad \frac{3}{2}k^2 = 9$$

따라서  $k^2 = 6$

## 22. [출제의도] 접선을 활용하여 함수를 추론한다.

$0 < x \leq 4$ 에서  $g(x) = x(x-4)^2$ 이고

함수  $g(x)$ 가  $x=4$ 에서 연속이므로

$$\lim_{x \rightarrow 4+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 4-} g(x), \quad \lim_{x \rightarrow 4+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4-} x(x-4)^2$$

$$f(4) = 0$$

함수  $g(x)$ 가  $x=4$ 에서 미분가능하므로

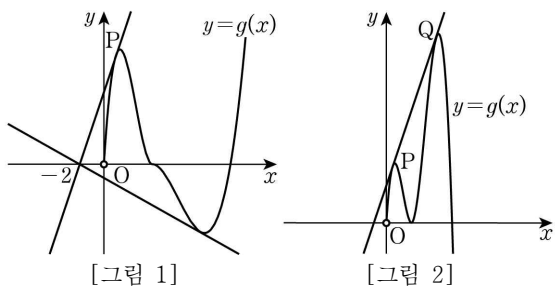
$$\lim_{x \rightarrow 4+} \frac{g(x) - g(4)}{x - 4} = \lim_{x \rightarrow 4-} \frac{g(x) - g(4)}{x - 4}$$

$$\lim_{x \rightarrow 4+} \frac{f(x) - f(4)}{x - 4} = \lim_{x \rightarrow 4-} \frac{x(x-4)^2}{x - 4}$$

$$f'(4) = 0$$

$$f(4) = f'(4) = 0 \text{ 이고 } g\left(\frac{21}{2}\right) = f\left(\frac{21}{2}\right) = 0 \text{ 이므로}$$

$$f(x) = a(x-4)^2(2x-21) \quad (a \neq 0) \text{이라 하자.}$$



$a > 0$ 이면 함수  $y = g(x)$ 의 그래프의 개형이 [그림 1]과 같으므로 조건 (나)를 만족시키지 못한다.  $a < 0$ 이면 [그림 2]와 같이 조건 (나)를 만족시키는 함수  $y = g(x)$ 의 그래프의 개형이 존재한다. 조건 (나)에 의하여 점  $(-2, 0)$ 에서 곡선  $y = g(x)$ 에 그은 기울기가 0이 아닌 접선은 곡선  $y = g(x)$  위의 두 점 P, Q에서 곡선  $y = g(x)$ 에 접한다. 두 점 P, Q의  $x$ 좌표를 각각  $t, s$ 라 하고  $0 < t < 4, s > 4$ 라 하자.

$0 < t < 4$ 에서  $g'(t) = 3t^2 - 16t + 16$ 이므로 접선의 방정식은

$$y = (3t^2 - 16t + 16)(x - t) + t^3 - 8t^2 + 16t$$

이다. 접선이 점  $(-2, 0)$ 을 지나므로

$$(3t^2 - 16t + 16)(-2 - t) + t^3 - 8t^2 + 16t = 0$$

$$2t^3 - 2t^2 - 32t + 32 = 0, \quad (t-4)(t+4)(t-1) = 0$$

$0 < t < 4$ 에서  $t=1$ 이므로 접선의 방정식은

$$y = 3x + 6 \text{ 이다. 이 접선이 점 Q에서}$$

곡선  $y = f(x) \quad (x > 4)$ 에 접한다.

$$f(x) = a(x-4)^2(2x-21) \text{에서}$$

$$f'(x) = 2a(3x^2 - 37x + 100) = 2a(x-4)(3x-25)$$

점 Q에서의 접선의 방정식은

$$y = 2a(s-4)(3s-25)(x-s) + a(s-4)^2(2s-21)$$

이 접선이 점  $(-2, 0)$ 을 지나므로

$$0 = 2a(s-4)(3s-25)(-2-s) + a(s-4)^2(2s-21)$$

$a \neq 0, s > 4$ 이므로

$$(s-4)(2s-21) = 2(s+2)(3s-25)$$

$$4s^2 - 9s - 184 = 0, \quad (4s+23)(s-8) = 0, \quad s = 8$$

$$f'(8) = 3 \text{ 이므로 } a = -\frac{3}{8}$$

$$f(x) = -\frac{3}{8}(x-4)^2(2x-21) \text{ 이므로}$$

$$g(10) = f(10) = \frac{27}{2}$$

따라서  $p = 2, q = 27$ 이므로  $p+q = 29$

## [확률과 통계]

23	㉔	24	㉕	25	㉖	26	㉗	27	㉘
28	㉙	29	64	30	5				

## 23. [출제의도] 이항분포를 이해하여 확률을 계산한다.

확률변수  $X$ 는 이항분포  $B(45, p)$ 를 따르므로

$$E(X) = 45p = 15 \text{에서 } p = \frac{1}{3}$$

## 24. [출제의도] 확률의 덧셈정리를 이해하여 확률을 구한다.

두 사건  $A, B$ 가 서로 배반사건이므로  $P(A \cap B) = 0$

확률의 덧셈정리에 의하여

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) = \frac{5}{6}$$

$$P(A) = 1 - P(A^C) = \frac{1}{4} \text{이므로}$$

$$P(B) = \frac{5}{6} - \frac{1}{4} = \frac{7}{12}$$

## 25. [출제의도] 중복순열을 이해하여 경우의 수를 구한다.

숫자 0, 1, 2 중에서 중복을 허락하여 4개를 택해 일렬로 나열할 때, 천의 자리에는 0이 올 수 없으므로 만들 수 있는 네 자리의 자연수의 개수는

$$2 \times {}_3\Pi_3 = 2 \times 3^3 = 54$$

이때 각 자리의 수의 합이 7보다 큰 자연수는 2222 뿐이므로 구하는 자연수의 개수는

$$54 - 1 = 53$$

## 26. [출제의도] 모평균의 신뢰구간을 이해하여 표본평균과 신뢰구간을 구한다.

양과 64개를 임의추출하여 얻은 표본평균이  $\bar{x}$ 이므로 모평균  $m$ 에 대한 신뢰도 95%의 신뢰구간은

$$\bar{x} - 1.96 \times \frac{16}{\sqrt{64}} \leq m \leq \bar{x} + 1.96 \times \frac{16}{\sqrt{64}}$$

$$\bar{x} - 3.92 \leq m \leq \bar{x} + 3.92$$

이때  $\bar{x} - 3.92 = 240.12, \bar{x} + 3.92 = a$ 이므로

$$\bar{x} = 240.12 + 3.92 = 244.04$$

$$a = 244.04 + 3.92 = 247.96$$

따라서

$$\bar{x} + a = 244.04 + 247.96 = 492$$

## 27. [출제의도] 원순열을 이해하여 의자를 배열하는 경우의 수를 구한다.

서로 이웃한 2개의 의자에 적힌 두 수가 서로소가 되려면 짝수가 적힌 의자끼리는 서로 이웃하면 안 되고 3과 6이 적힌 의자도 서로 이웃하면 안 된다.

홀수가 적힌 의자를 일정한 간격을 두고 원형으로 배열하는 원순열의 수는

$$(4-1)! = 3! = 6$$

홀수가 적힌 의자들의 사이사이에 있는 4개의 자리 중 3이 적힌 의자와 이웃하지 않는 자리에 6이 적힌 의자를 배열하고, 남은 3개의 자리에 나머지 3개의 의자를 배열하는 경우의 수는

$${}_2C_1 \times 3! = 2 \times 6 = 12$$

따라서 구하는 경우의 수는

$$6 \times 12 = 72$$

## 28. [출제의도] 정규분포의 성질을 이해하여 확률을 구하는 문제를 해결한다.

$$E(X) = m_1, E(Y) = m_2, V(X) = V(Y) = \sigma^2$$

으로 놓으면 두 확률변수  $X, Y$ 는 각각 정규분포  $N(m_1, \sigma^2), N(m_2, \sigma^2)$ 을 따른다.

함수  $y = f(x)$ 의 그래프는 직선  $x = m_1$ 에 대하여 대칭이고,  $f(a) = f(3a)$ 이므로

$$m_1 = \frac{a+3a}{2} = 2a$$

함수  $y = f(x)$ 의 그래프를  $x$ 축의 방향으로 평행이동 하면 함수  $y = g(x)$ 의 그래프와 일치하고,

$$f(a) = f(3a) = g(2a) \text{ 이므로}$$

$$g(0) = g(2a) \text{ 또는 } g(2a) = g(4a)$$

이때 함수  $y = g(x)$ 의 그래프는 직선  $x = m_2$ 에 대하여 대칭이므로

$$m_2 = \frac{0+2a}{2} = a \text{ 또는 } m_2 = \frac{2a+4a}{2} = 3a$$

$$P(Y \leq 2a) = 0.6915 > 0.5 \text{이므로 } m_2 < 2a \text{이다.}$$

$$a > 0 \text{이므로 } m_2 = a$$

확률변수  $Z$ 가 표준정규분포  $N(0, 1)$ 을 따를 때

$$P(Y \leq 2a) = P\left(Z \leq \frac{2a-a}{\sigma}\right) = P\left(Z \leq \frac{a}{\sigma}\right) \\ = 0.5 + P\left(0 \leq Z \leq \frac{a}{\sigma}\right) = 0.6915$$

$$P(0 \leq Z \leq 0.5) = 0.1915 \text{이므로}$$

$$\frac{a}{\sigma} = 0.5, \text{ 즉 } \sigma = 2a$$

따라서

$$P(0 \leq X \leq 3a) = P\left(\frac{0-2a}{2a} \leq Z \leq \frac{3a-2a}{2a}\right) \\ = P(-1 \leq Z \leq 0.5) \\ = P(0 \leq Z \leq 1) + P(0 \leq Z \leq 0.5) \\ = 0.3413 + 0.1915 \\ = 0.5328$$

## 29. [출제의도] 중복조합을 이용하여 조건을 만족시키는 순서쌍의 개수를 구하는 문제를 해결한다.

조건 (가)를 만족시키는 순서쌍  $(a, b, c)$ 의 개수는

$${}_8H_3 = {}_{8+3-1}C_3 = {}_{10}C_3 = 120$$

이때 조건 (나)를 만족시키지 않는 경우는

$$(a-b)(b-c) \neq 0$$

$$\text{즉, } a < b < c \leq 8 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

①을 만족시키는 순서쌍  $(a, b, c)$ 의 개수는

$${}_8C_3 = 56$$

따라서 구하는 모든 순서쌍  $(a, b, c)$ 의 개수는

$$120 - 56 = 64$$

## 30. [출제의도] 조건부확률을 이해하여 확률을 구하는 문제를 해결한다.

시행을 한 번 한 후 주머니에 들어 있는 모든 공에 적힌 수의 합이 3의 배수인 사건을  $A$ , 주머니에서 꺼낸 2개의 공이 서로 다른 색인 사건을  $B$ 라 하자. 주머니에 들어 있는 모든 공에 적힌 수의 합이 9이므로 이 시행을 한 번 한 후 주머니에 들어 있는 공에 적힌 수의 합이 3의 배수가 되는 경우는 꺼낸 2개의 공의 색깔에 따라 다음과 같이 두 가지이다.

(i) 꺼낸 2개의 공이 서로 다른 색인 경우

꺼낸 2개의 공이 (㉑, ㉒) 또는 (㉒, ㉑)이어야 하므로

$$P(A \cap B) = \frac{2}{{}_5C_2} = \frac{1}{5}$$

(ii) 꺼낸 2개의 공이 서로 같은 색인 경우

꺼낸 2개의 공이 (㉑, ㉑)이고 이 두 개의 공 중 ㉑을 주머니에 다시 넣거나, 꺼낸 2개의 공이 (㉒, ㉒)이고 이 두 개의 공 중 ㉒를 주머니에 다시 넣어야 하므로

$$P(A \cap B^C) = \frac{1}{{}_5C_2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{{}_5C_2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{10}$$

(i), (ii)에서 구하는 확률은

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{P(A \cap B)}{P(A \cap B) + P(A \cap B^C)} \\ = \frac{\frac{1}{5}}{\frac{1}{5} + \frac{1}{10}} = \frac{2}{3}$$

따라서  $p = 3, q = 2$ 이므로

$$p+q = 5$$

[미적분]

23	④	24	②	25	③	26	⑤	27	①
28	④	29	30	30	91				

23. [출제의도] 수열의 극한값을 계산한다.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 + 3n - 5}{n^2 + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 + \frac{3}{n} - \frac{5}{n^2}}{1 + \frac{1}{n^2}} = 2$$

24. [출제의도] 정적분과 급수의 합 사이의 관계를 이해한다.

$$x_k = \frac{\pi k}{3n} \text{라 하면 } \Delta x = \frac{\pi}{3n} \text{이므로}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2\pi}{n} \sum_{k=1}^n \sin \frac{\pi k}{3n} = 6 \times \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin x \, dx = 6 \times \left[ -\cos x \right]_0^{\frac{\pi}{3}} = 3$$

25. [출제의도] 정적분을 이용하여 입체도형의 부피를 구한다.

$x$  좌표가  $t$  ( $1 \leq t \leq 4$ )인 점을 지나고  $x$  축에 수직인 평면으로 입체도형을 자른 단면의 넓이를  $S(t)$ 라 하면

$$S(t) = \left( \frac{2}{\sqrt{t}} \right)^2 = \frac{4}{t}$$

따라서 구하는 부피는

$$\int_1^4 S(t) \, dt = \int_1^4 \frac{4}{t} \, dt = \left[ 4 \ln t \right]_1^4 = 8 \ln 2$$

26. [출제의도] 역함수의 미분법을 이해하여 미분계수를 구한다.

$$f'(x) = 2e^{2x} + e^x \text{에서 } f'(0) = 3$$

$$h(x) = g(5f(x)) \text{라 하면 } f(0) = 1 \text{이므로}$$

$$h'(0) = g'(5f(0)) \times 5f'(0) = 15g'(5)$$

$$g(5) = t \text{로 놓으면 } f(t) = 5 \text{에서}$$

$$e^{2t} + e^t - 1 = 5, (e^t - 2)(e^t + 3) = 0$$

$$e^t > 0 \text{이므로 } e^t = 2, \text{ 즉 } t = \ln 2$$

$$f'(\ln 2) = 2e^{2\ln 2} + e^{\ln 2} = 10$$

$$\text{따라서 } h'(0) = 15g'(\ln 2) = 15 \times \frac{1}{f'(\ln 2)} = \frac{3}{2}$$

27. [출제의도] 등비급수를 이해하여 급수의 합을 구한다.

등비수열  $\{a_n\}$ 의 첫째항을  $a$ , 공비를  $r$ 이라 하자.

급수  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{3^n}$ 은 첫째항이  $\frac{a}{3}$ , 공비가  $\frac{r}{3}$ 인 등비급수

이고 수렴하므로  $-1 < \frac{r}{3} < 1, -3 < r < 3 \dots\dots \textcircled{1}$

급수  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_{2n}}$ 은 첫째항이  $\frac{1}{ar}$ , 공비가  $\frac{1}{r^2}$ 인 등비급

수이고 수렴하므로  $-1 < \frac{1}{r^2} < 1, r^2 > 1 \dots\dots \textcircled{2}$

수열  $\{a_n\}$ 의 모든 항이 자연수이므로

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{에서 } r = 2$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{3^n} = \frac{\frac{a}{3}}{1 - \frac{2}{3}} = a = 4$$

$$a_n = 4 \times 2^{n-1} = 2^{n+1} \text{이므로}$$

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_{2n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{2n+1}} = \frac{\frac{1}{8}}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{1}{6}$$

28. [출제의도] 적분법을 활용하여 함수를 구하는 문제를 해결한다.

$a \neq b$ 이므로 조건 (가)에서

$a \neq 0, b = 0$  또는  $a = 0, b \neq 0$

(i)  $a \neq 0, b = 0$ 일 때,

$\sin x = t$ 로 놓으면  $x = 0$ 일 때  $t = 0, x = \frac{\pi}{2}$ 일

때  $t = 1$ 이고  $\frac{dt}{dx} = \cos x$ 이므로

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) \, dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x \cos x \times e^{a \sin x}) \, dx \\ &= \int_0^1 t e^{at} \, dt = \left[ \frac{t}{a} e^{at} \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{a} e^{at} \, dt \\ &= \frac{e^a}{a} - \left[ \frac{1}{a^2} e^{at} \right]_0^1 \\ &= \frac{(a-1)e^a + 1}{a^2} \end{aligned}$$

$$\text{조건 (나)에서 } \frac{(a-1)e^a + 1}{a^2} = \frac{1}{a^2} - 2e^a$$

$$a-1 = -2a^2, (a+1)(2a-1) = 0$$

$$a = -1 \text{ 또는 } a = \frac{1}{2}$$

(ii)  $a = 0, b \neq 0$ 일 때,

$\cos x = t$ 로 놓으면  $x = 0$ 일 때  $t = 1, x = \frac{\pi}{2}$ 일

때  $t = 0$ 이고  $\frac{dt}{dx} = -\sin x$ 이므로

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) \, dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x \cos x \times e^{b \cos x}) \, dx \\ &= - \int_1^0 t e^{bt} \, dt = \int_0^1 t e^{bt} \, dt \\ &= \left[ \frac{t}{b} e^{bt} \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{b} e^{bt} \, dt \\ &= \frac{e^b}{b} - \left[ \frac{1}{b^2} e^{bt} \right]_0^1 \\ &= \frac{(b-1)e^b + 1}{b^2} \end{aligned}$$

$$\text{조건 (나)에서 } \frac{(b-1)e^b + 1}{b^2} = \frac{1}{b^2} - 2e^b$$

$$b-1 = -2b^2, (b+1)(2b-1) = 0$$

$$b = -1 \text{ 또는 } b = \frac{1}{2}$$

(i), (ii)에서 두 실수  $a, b$ 의 순서쌍  $(a, b)$ 는

$$(-1, 0), \left( \frac{1}{2}, 0 \right), (0, -1), \left( 0, \frac{1}{2} \right)$$

따라서  $a-b$ 의 최솟값은

$$-1-0 = -1$$

29. [출제의도] 삼각함수의 극한을 이해하여 도형의 넓이의 극한값을 구하는 문제를 해결한다.

삼각형 ABC에서  $\overline{AB} = \overline{AC}$ 이고  $\angle BAC = \theta$ 이므로

$$\angle BCA = \frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2}$$

점 D는 선분 AB를 지름으로 하는 원 위에 있으므로

$$\angle BDA = \frac{\pi}{2}$$

$$\overline{CD} = \overline{BC} \times \cos \left( \frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2} \right) = 2 \sin \frac{\theta}{2}$$

점 E에서 선분 AC에 내린 수선의 발을 H라 하면 두 삼각형 AEH와 ABD는 서로 닮음이고 닮음비는 1:2이다.

$$\overline{EH} = \frac{1}{2} \times \overline{BD} = \frac{1}{2} \times \overline{BC} \times \sin \left( \frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2} \right) = \cos \frac{\theta}{2}$$

$$S(\theta) = \frac{1}{2} \times \overline{CD} \times \overline{EH} = \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}$$

$$\lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{S(\theta)}{\theta} = \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \left( \frac{1}{2} \times \frac{\sin \frac{\theta}{2}}{\frac{\theta}{2}} \times \cos \frac{\theta}{2} \right) = \frac{1}{2}$$

$$\text{따라서 } 60 \times \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{S(\theta)}{\theta} = 30$$

30. [출제의도] 미분법을 활용하여 함수를 구하는 문제를 해결한다.

$$\begin{aligned} f'(x) &= (2x+a)e^{-x} - (x^2+ax+b)e^{-x} \\ &= -\{x^2+(a-2)x+b-a\}e^{-x} \end{aligned}$$

$f'(x) = 0$ 에서 모든 실수  $x$ 에 대하여  $e^{-x} > 0$ 이므로  $x^2+(a-2)x+b-a=0 \dots\dots \textcircled{1}$

조건 (가)에서 이차방정식  $\textcircled{1}$ 은 서로 다른 두 실근을 가져야 한다. 이 두 실근을  $\alpha, \beta$  ( $\alpha < \beta$ )라 하자.

이차방정식  $\textcircled{1}$ 의 판별식을  $D_1$ 이라 하면

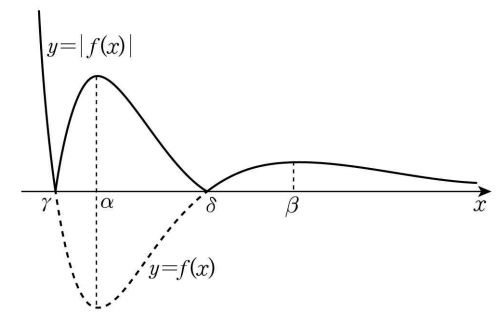
$$D_1 = (a-2)^2 - 4(b-a) = a^2 + 4 - 4b > 0$$

$f(x) = 0$ 에서 모든 실수  $x$ 에 대하여  $e^{-x} > 0$ 이므로  $x^2+ax+b=0 \dots\dots \textcircled{2}$

이차방정식  $\textcircled{2}$ 의 판별식을  $D_2$ 라 하면  $D_2 = a^2 - 4b$

(i)  $D_2 > 0$ 인 경우

함수  $y=f(x)$ 의 그래프가  $x$  축과 서로 다른 두 점에서 만나고, 이 두 점의  $x$  좌표를  $\gamma, \delta$  ( $\gamma < \delta$ )라 하면 함수  $y=|f(x)|$ 의 그래프의 개형은 [그림 1]과 같다.



[그림 1]

함수  $|f(x)|$ 는  $x=\alpha, x=\beta$ 에서 극대이고  $x=\gamma, x=\delta$ 에서 극소이므로 조건 (나)에서 모든  $k$ 의 값의 합은 이차방정식  $\textcircled{1}$ 의 서로 다른 두 실근  $\alpha, \beta$ 와 이차방정식  $\textcircled{2}$ 의 서로 다른 두 실근  $\gamma, \delta$ 의 합과 같다.

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

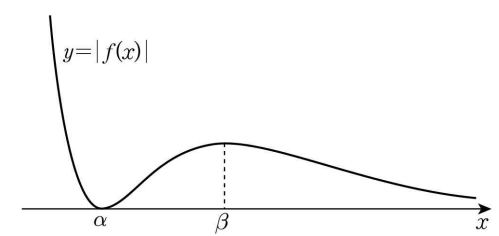
$$(\alpha+\beta)+(\gamma+\delta)=(2-a)+(-a)=3$$

$$a = -\frac{1}{2}$$

이때  $a$ 는 정수가 아니므로 조건을 만족시키지 않는다.

(ii)  $D_2 = 0$ 인 경우

함수  $y=f(x)$ 의 그래프가  $x$  축에 접하고, 이 접점의  $x$  좌표는  $\alpha$ 이므로 함수  $y=|f(x)|$ 의 그래프의 개형은 [그림 2]와 같다.



[그림 2]

함수  $|f(x)|$ 는  $x=\beta$ 에서 극대이고  $x=\alpha$ 에서 극소이므로 조건 (나)에서 모든  $k$ 의 값의 합은 이차방정식  $\textcircled{1}$ 의 서로 다른 두 실근  $\alpha, \beta$ 의 합과 같다.

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

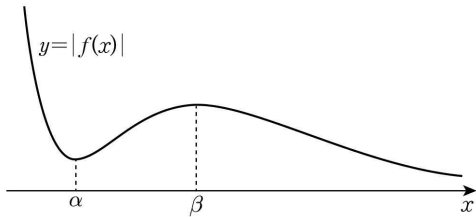
$$\alpha+\beta=2-a=3, a=-1$$

$$D_2 = (-1)^2 - 4b = 0, b = \frac{1}{4}$$

이때  $b$ 는 정수가 아니므로 조건을 만족시키지 않는다.

(iii)  $D_2 < 0$ 인 경우

함수  $y=f(x)$ 의 그래프가  $x$  축과 만나지 않으므로 함수  $y=|f(x)|$ 의 그래프의 개형은 [그림 3]과 같다.



[그림 3]

함수  $|f(x)|$ 는  $x = \beta$ 에서 극대이고  $x = \alpha$ 에서 극소이므로 조건 (나)에서 모든  $k$ 의 값의 합은 이차방정식 ㉠의 서로 다른 두 실근  $\alpha, \beta$ 의 합과 같다.

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha + \beta = 2 - a = 3, \quad a = -1$$

$$D_1 = (-1)^2 + 4 - 4b > 0, \quad b < \frac{5}{4}$$

$$D_2 = (-1)^2 - 4b < 0, \quad b > \frac{1}{4}$$

$$\frac{1}{4} < b < \frac{5}{4} \text{ 이고 } b \text{ 는 정수이므로 } b = 1$$

(i), (ii), (iii)에서 조건을 만족시키는 정수  $a, b$ 의 값이  $a = -1, b = 1$  이므로

$$f(x) = (x^2 - x + 1)e^{-x}$$

$$\text{따라서 } f(10) = (10^2 - 10 + 1)e^{-10} = 91e^{-10} \text{ 이므로}$$

$$p = 91$$

[기하]

23	㉠	24	㉡	25	㉢	26	㉣	27	㉤
28	㉥	29	20	30	15				

23. [출제의도] 좌표공간에서 외분점의 좌표를 계산한다.

선분 AB를 3:2로 외분하는 점의 좌표는

$$\left( \frac{3 \times 2 - 2 \times a}{3 - 2}, \frac{3 \times (-3) - 2 \times 0}{3 - 2}, \frac{3 \times 0 - 2 \times 1}{3 - 2} \right)$$

$$\text{즉, } (6 - 2a, -9, -2)$$

$yz$  평면 위의 점은  $x$  좌표가 0 이므로  $6 - 2a = 0$

$$\text{따라서 } a = 3$$

24. [출제의도] 쌍곡선을 이해하여 쌍곡선의 주축의 길이를 구한다.

$$\text{쌍곡선 } \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{27} = 1 \text{ 의 점근선의 기울기는}$$

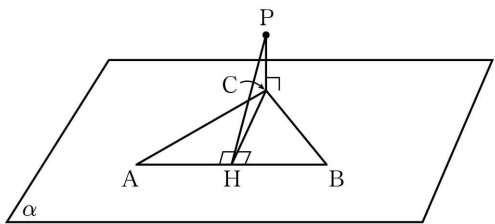
$$\pm \frac{\sqrt{27}}{\sqrt{a^2}} = \pm \frac{3\sqrt{3}}{a}$$

이 쌍곡선의 한 점근선의 방정식이  $y = 3x$  이므로

$$\frac{3\sqrt{3}}{a} = 3 \text{ 에서 } a = \sqrt{3}$$

$$\text{따라서 이 쌍곡선의 주축의 길이는 } 2a = 2\sqrt{3}$$

25. [출제의도] 삼수선의 정리를 이해하여 점과 직선 사이의 거리를 구한다.



점 C에서 직선 AB에 내린 수선의 발을 H라 하자. 삼각형 ABC의 넓이가 12 이므로

$$\frac{1}{2} \times 6 \times \overline{CH} = 12 \text{ 에서 } \overline{CH} = 4$$

$\overline{PC} \perp \alpha, \overline{CH} \perp \overline{AB}$  이므로 삼수선의 정리에 의하여  $\overline{PH} \perp \overline{AB}$

삼각형 PHC는 선분 PH를 빗변으로 하는 직각삼각형이므로  $\overline{PH} = \sqrt{\overline{PC}^2 + \overline{CH}^2} = \sqrt{2^2 + 4^2} = 2\sqrt{5}$

따라서 점 P와 직선 AB사이의 거리는  $2\sqrt{5}$ 이다.

26. [출제의도] 포물선의 성질을 이해하여 선분의 길이를 구하는 문제를 해결한다.

$\overline{AF} = \overline{AH}$  이고 포물선의 축이  $x$  축이므로 이 포물선의 준선은  $y$  축이다.

포물선의 꼭짓점의 좌표가  $(1, 0)$ 이고 초점과 꼭짓점 사이의 거리가 1이므로 포물선의 방정식은

$$y^2 = 4(x - 1)$$

점 B에서  $y$  축에 내린 수선의 발을 H'이라 하면

$$\overline{AH} : \overline{BH'} = \overline{OH} : \overline{OH'} = \overline{AF} : \overline{BF} = 1 : 4$$

점 A의 좌표를  $(a, b)$  ( $a > 0, b > 0$ )으로 놓으면 점 B의 좌표는  $(4a, 4b)$ 이다.

두 점 A, B는 포물선  $y^2 = 4(x - 1)$  위의 점이므로

$$b^2 = 4(a - 1), \quad 16b^2 = 4(4a - 1)$$

$$16 \times 4(a - 1) = 4(4a - 1), \quad 12a = 15, \quad a = \frac{5}{4}$$

$$\text{따라서 } \overline{AF} = a = \frac{5}{4}$$

27. [출제의도] 평면벡터의 연산의 성질을 이해하여 사각형의 넓이를 구한다.

선분 BD를 2:3으로 내분하는 점을 E라 하면

$$\overrightarrow{AE} = \frac{3\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AD}}{5}$$

조건 (나)에서

$$t\overrightarrow{AC} = 3\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AD} = 5\overrightarrow{AE}$$

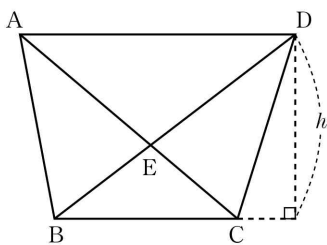
를 만족시키는 실수  $t$ 가 존재하므로 점 E는 선분 AC 위의 점이다.

조건 (가)에서 두 벡터  $\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{BC}$ 가 서로 평행하고

$$\overline{BE} : \overline{ED} = 2 : 3$$

이므로 두 삼각형 EDA, EBC는 서로 닮음이고 닮음비는 3:2이다.

$$|\overrightarrow{AD}| : |\overrightarrow{BC}| = 3 : 2 \text{ 에서 } |\overrightarrow{BC}| = \frac{2}{3} |\overrightarrow{AD}| \quad \dots\dots \text{㉠}$$



사다리꼴 ABCD의 높이를  $h$ 로 놓으면 삼각형 ABD의 넓이가 12 이므로

$$\frac{1}{2} \times |\overrightarrow{AD}| \times h = 12, \quad |\overrightarrow{AD}| \times h = 24 \quad \dots\dots \text{㉡}$$

㉠, ㉡에 의하여 사다리꼴 ABCD의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times (|\overrightarrow{AD}| + |\overrightarrow{BC}|) \times h$$

$$= \frac{1}{2} \times \left( |\overrightarrow{AD}| + \frac{2}{3} |\overrightarrow{AD}| \right) \times h$$

$$= \frac{5}{6} \times |\overrightarrow{AD}| \times h = \frac{5}{6} \times 24$$

$$= 20$$

28. [출제의도] 타원의 성질을 이해하여 타원의 초점의 좌표를 구한다.

$$\text{타원 } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{18} = 1 \text{ 의 초점이 } F(c, 0), F'(-c, 0) \text{ 이므로}$$

$$a^2 - 18 = c^2, \quad a^2 = c^2 + 18 \quad \dots\dots \text{㉠}$$

삼각형 RF'F가 한 변의 길이가  $2c$ 인 정삼각형이므로  $\overline{OR} = \sqrt{3}c$

$$\text{점 F'이 선분 QF의 중점이므로 } \overline{QO} = 3c$$

$$\text{직선 QR의 기울기가 } \frac{\overline{OR}}{\overline{QO}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \text{ 이므로 타원 위의}$$

점 P에서의 접선 QR의 방정식은

$$y = \frac{\sqrt{3}}{3}x + \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 a^2 + 18}$$

$$= -\frac{\sqrt{3}}{3}x + \sqrt{\frac{1}{3}a^2 + 18}$$

직선 QR의  $y$ 절편이  $\sqrt{3}c$ 이므로

$$\sqrt{\frac{1}{3}a^2 + 18} = \sqrt{3}c, \quad \frac{1}{3}a^2 + 18 = 3c^2$$

$$\text{㉠에 의하여 } \frac{1}{3}(c^2 + 18) + 18 = 3c^2, \quad \frac{8}{3}c^2 = 24$$

$$\text{따라서 } c^2 = 9$$

29. [출제의도] 평면벡터의 내적을 이해하여 벡터의 내적을 구하는 문제를 해결한다.

$$\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{AP} = 0 \text{ 에서 } \overline{OP} \perp \overline{AP}$$

$$\overrightarrow{OQ} \cdot \overrightarrow{AQ} = 0 \text{ 에서 } \overline{OQ} \perp \overline{AQ}$$

직각삼각형 OAP에서  $\overline{OA} = 5, \overline{OP} = 2$  이므로

$$\cos(\angle AOP) = \frac{2}{5}$$

직각삼각형 OAQ에서  $\overline{OA} = 5, \overline{AQ} = 1$  이므로

$$\cos(\angle QAO) = \frac{1}{5}$$

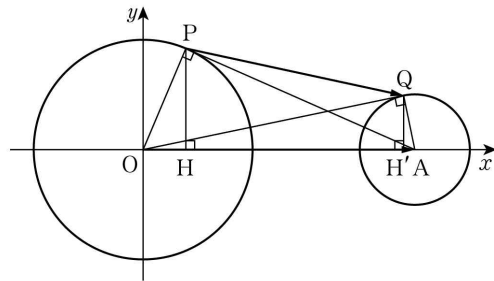
두 점 P, Q에서  $x$  축에 내린 수선의 발을 각각 H, H'이라 하면

$$\overline{OH} = \overline{OP} \times \cos(\angle AOP) = 2 \times \frac{2}{5} = \frac{4}{5}$$

$$\overline{H'A} = \overline{QA} \times \cos(\angle QAO) = 1 \times \frac{1}{5} = \frac{1}{5}$$

$$\text{이므로 } \overline{HH'} = \overline{OH'} - \overline{OH} = \left( 5 - \frac{1}{5} \right) - \frac{4}{5} = 4$$

$$\text{따라서 } \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{PQ} = \overline{OA} \times \overline{HH'} = 5 \times 4 = 20$$



30. [출제의도] 공간도형의 성질을 이용하여 정사영의 넓이를 구하는 문제를 해결한다.

구 S의 중심을 E(0, 0,  $\sqrt{5}$ )라 하면 점 E에서  $xy$  평면에 내린 수선의 발은 원점 O이다.

점 O는 원 C의 중심이므로

$$\overline{OB} = \sqrt{\overline{EB}^2 - \overline{OE}^2} = \sqrt{3^2 - (\sqrt{5})^2} = 2$$

따라서 원 C의 반지름의 길이는 2이다.

삼각형 BCD의 외접원을 C'이라 하고, 구의 중심 E에서 평면 BCD에 내린 수선의 발을 H라 하면

점 H는 원 C'의 중심이다.

$$\text{조건 (나)에 의하여 } \overline{EH} = \overline{OB} = 2$$

직각삼각형 EBH에서

$$\overline{HB} = \sqrt{\overline{EB}^2 - \overline{EH}^2} = \sqrt{3^2 - 2^2} = \sqrt{5}$$

이므로 원 C'의 반지름의 길이는  $\sqrt{5}$ 이다.

선분 BC의 중점을 M이라 하면  $\overline{HM} \perp \overline{BC}$ 이고

$$\overline{HB} = \sqrt{5}, \quad \overline{BM} = \frac{\sqrt{15}}{2}$$

$$\cos(\angle HBM) = \frac{\overline{BM}}{\overline{HB}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ 이므로 } \angle HBM = 30^\circ$$

조건 (다)에 의하여  $\angle CBD = 2 \times \angle HBM = 60^\circ$

조건 (나)에서 직선 AB가 평면 BCD에 수직이므로 평면 ABC와 평면 ABD가 이루는 예각의 크기를  $\theta$ 라 하면  $\theta = \angle CBD = 60^\circ$

조건 (나)에서  $\overline{AB} \perp \overline{BC}$ 이므로 삼각형 ABC의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times \overline{AB} \times \overline{BC} = \frac{1}{2} \times 4 \times \sqrt{15} = 2\sqrt{15}$$

삼각형 ABC의 평면 ABD 위로의 정사영의 넓이는

$$2\sqrt{15} \times \cos 60^\circ = \sqrt{15}$$

$$\text{따라서 } k^2 = 15$$