

● 수학 영역 ●

수학 정답

1	③	2	④	3	①	4	②	5	⑤
6	③	7	①	8	④	9	③	10	⑤
11	⑤	12	②	13	②	14	⑤	15	①
16	③	17	④	18	①	19	④	20	②
21	④	22	20	23	30	24	6	25	24
26	12	27	510	28	189	29	5	30	36

해설

1. [출제의도] 다항식의 덧셈을 계산한다.

$$\begin{aligned} A+B &= (3x^2+2x-1)+(-x^2+x+3) \\ &= (3x^2-x^2)+(2x+x)+(-1+3) \\ &= 2x^2+3x+2 \end{aligned}$$

2. [출제의도] 복소수의 값을 계산한다.

$$\begin{aligned} 1+\frac{2}{1-i} &= 1+\frac{2 \times (1+i)}{(1-i) \times (1+i)} \\ &= 1+\frac{2(1+i)}{2} \\ &= 1+(1+i) \\ &= 2+i \end{aligned}$$

3. [출제의도] 조합의 수를 계산한다.

$$\begin{aligned} {}_4C_2 &= \frac{{}_4P_2}{2!} \\ &= \frac{4 \times 3}{2 \times 1} = 6 \end{aligned}$$

4. [출제의도] 역함수를 이해하여 함수값을 구한다.

$$f(2)=4 \text{ 이므로 } f^{-1}(4)=2$$

5. [출제의도] 나머지정리를 이해하여 미지수의 값을 구한다.

$$\begin{aligned} P(x) &= x^3+ax^2+12 \text{ 라 하자.} \\ \text{다항식 } P(x) \text{ 를 } x-2 \text{ 로 나눈 나머지가 } 2a-8 \text{ 이므로} \\ P(2) &= 4a+20=2a-8 \\ 2a &= -28 \\ \text{따라서 } a &= -14 \end{aligned}$$

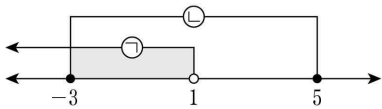
6. [출제의도] 도형의 평행이동과 대칭이동을 이해하여 점의 좌표를 구한다.

$$\begin{aligned} \text{원 } (x+5)^2+(y+11)^2=25 \text{ 를 } y \text{ 축의 방향으로 } 1 \text{ 만큼} \\ \text{평행이동한 원의 방정식은} \\ (x+5)^2+(y+10)^2=25 \\ \text{원 } (x+5)^2+(y+10)^2=25 \text{ 를 } x \text{ 축에 대하여 대칭이동한} \\ \text{원의 방정식은} \\ (x+5)^2+(y-10)^2=25 \\ \text{원 } (x+5)^2+(y-10)^2=25 \text{ 가 점 } (0, a) \text{ 를 지나므로} \\ (0+5)^2+(a-10)^2=25, (a-10)^2=0 \\ \text{따라서 } a &= 10 \end{aligned}$$

7. [출제의도] 연립부등식을 이해하여 해를 구한다.

$$\begin{aligned} 2x+1 < 3 \text{ 에서 } x < 1 \quad \text{㉠} \\ x^2-2x-15 \leq 0 \text{ 에서} \\ (x-5)(x+3) \leq 0 \\ -3 \leq x \leq 5 \quad \text{㉡} \end{aligned}$$

이다. 따라서 연립부등식의 해는 $-3 \leq x < 1$ 이다.



이를 만족시키는 정수 x 는 $-3, -2, -1, 0$ 이고 그 개수는 4이다.

8. [출제의도] 유리함수의 그래프를 이해하여 미지수의 값을 구한다.

$$\begin{aligned} \text{함수 } y &= \frac{b}{x-a} \text{ 의 그래프가 점 } (2, 4) \text{ 를 지나므로} \\ 4 &= \frac{b}{2-a} \\ 4a+b &= 8 \quad \text{㉠} \\ \text{함수 } y &= \frac{b}{x-a} \text{ 의 한 점근선의 방정식이 } x=4 \text{ 이므로} \\ a &= 4 \text{ 이고 이를 ㉠에 대입하면 } b=-8 \\ \text{따라서 } a-b &= 4-(-8)=12 \end{aligned}$$

9. [출제의도] 직선의 방정식을 이해하여 직선의 x 절편을 구한다.

$$\begin{aligned} \text{두 방정식 } x+3y+2=0, \quad 2x-3y-14=0 \text{ 을 연립하면} \\ x=4, \quad y=-2 \text{ 이므로 두 직선의 교점의 좌표는} \\ (4, -2) \text{ 이다.} \\ \text{직선 } 2x+y+1=0 \text{ 의 기울기는 } -2 \text{ 이므로 이 직선과} \\ \text{평행한 직선의 기울기는 } -2 \text{ 이다. 기울기가 } -2 \text{ 이고} \\ \text{점 } (4, -2) \text{ 를 지나는 직선의 방정식은} \\ y-(-2) &= -2(x-4), \text{ 즉 } y=-2x+6 \text{ 이다.} \\ y &= -2x+6 \text{ 에 } y=0 \text{ 을 대입하면 } 0=-2x+6, \quad x=3 \text{ 이} \\ \text{므로 } x \text{ 절편은 } 3 \end{aligned}$$

10. [출제의도] 삼차방정식을 이해하여 미지수의 값을 구한다.

$$\begin{aligned} f(x) &= x^3+x^2-2 \text{ 라 하면 } f(1)=0 \text{ 이므로, } f(x) \text{ 는} \\ x-1 \text{ 을 인수로 갖는다. 조립제법을 이용하여 } f(x) \text{ 를} \\ \text{인수분해하면} \end{aligned}$$

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & 1 & 0 & -2 \\ & & 1 & 2 & 2 \\ \hline & 1 & 2 & 2 & 0 \end{array}$$

$$\begin{aligned} x^3+x^2-2 &= (x-1)(x^2+2x+2) \text{ 이므로} \\ (x-1)(x^2+2x+2) &= 0 \text{ 에서} \\ x=1 \text{ 또는 } x^2+2x+2 &= 0 \\ x^2+2x+2 &= 0 \text{ 에서} \\ x &= \frac{-2 \pm \sqrt{2^2-4 \times 1 \times 2}}{2} \\ &= \frac{-2 \pm 2i}{2} = -1 \pm i \\ a &= -1, \quad b=1 \text{ 또는 } a=-1, \quad b=-1 \\ \text{따라서 } |a|+|b| &= 2 \end{aligned}$$

11. [출제의도] 집합의 연산 법칙을 이해하여 조건을 만족시키는 집합의 모든 원소의 합을 구한다.

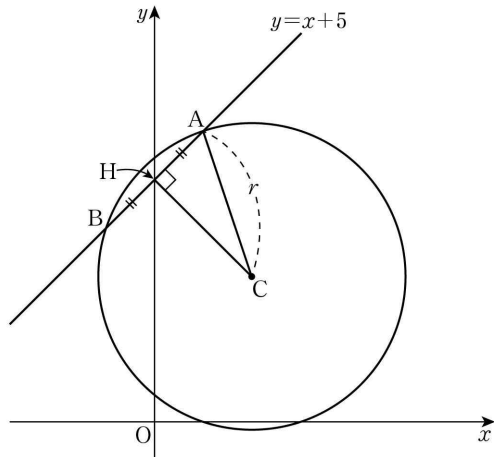
$$\begin{aligned} \text{조건 (나)에서 } A^C \cup B &= \{1, 2, 8, 16\} \text{ 이고} \\ \text{드모르간의 법칙에 의하여 } A \cap B^C &= (A^C \cup B)^C \text{ 이므로} \\ A \cap B^C &= (A^C \cup B)^C = \{4, 32\} \text{ 이다.} \\ A &= (A \cap B) \cup (A \cap B^C) \\ &= \{2, 8\} \cup \{4, 32\} \\ &= \{2, 4, 8, 32\} \\ \text{따라서 집합 } A \text{ 의 모든 원소의 합은} \\ 2+4+8+32 &= 46 \end{aligned}$$

12. [출제의도] 역함수를 이해하여 미지수의 값을 구한다.

$$\begin{aligned} \text{함수 } f(x) \text{ 의 역함수가 존재하려면 } f(x) \text{ 는} \\ \text{일대일대응이어야 한다.} \\ a+7=0 \text{ 또는 } -a+5=0 \text{ 일 때 } f(x) \text{ 는} \\ \text{일대일대응이 아니다.} \\ \text{그러므로 } a \neq -7, \quad a \neq 5 \text{ 이다.} \\ \text{함수 } f(x) \text{ 가 일대일대응이기 위해서는} \\ \text{직선 } y=(a+7)x-1 \text{ 의 기울기 } a+7 \text{ 과} \\ \text{직선 } y=(-a+5)x+2a+1 \text{ 의 기울기 } -a+5 \text{ 의 부호가} \\ \text{같아야 한다.} \\ \text{그러므로 } (a+7)(-a+5) > 0, \quad (a+7)(a-5) < 0 \\ -7 < a < 5 \\ \text{따라서 이를 만족시키는 정수 } a \text{ 는 } -6, -5, \dots, 4 \text{ 이고} \\ \text{그 개수는 } 11 \text{ 이다.} \end{aligned}$$

13. [출제의도] 원과 직선의 위치 관계를 이해하여 미지수의 값을 구한다.

$$\begin{aligned} \text{원 } (x-2)^2+(y-3)^2=r^2 \text{ 의 중심을 } C \text{ 라 하자.} \\ \text{원의 중심 } C \text{ 에서 선분 } AB \text{ 에 내린 수선의 발을 } H \text{ 라} \\ \text{하면 } \overline{AH}=\overline{BH} \text{ 이고 } \overline{AB}=2\sqrt{2} \text{ 이므로 } \overline{AH}=\sqrt{2} \text{ 이다.} \\ \text{점 } C(2, 3) \text{ 과 직선 } x-y+5=0 \text{ 사이의 거리를 구하면} \\ \overline{CH} &= \frac{|2-3+5|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}} = \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2} \\ \text{직각삼각형 } ACH \text{ 에서} \\ r^2 &= \overline{AH}^2 + \overline{CH}^2 \\ &= (\sqrt{2})^2 + (2\sqrt{2})^2 \\ &= 10 \\ \text{따라서 } r &= \sqrt{10} \end{aligned}$$



14. [출제의도] 무리함수의 그래프를 이해하여 삼각형의 넓이를 구한다.

$$\begin{aligned} \text{점 } B(k, \sqrt{k}), \text{ 점 } C(k, k) \text{ 이고 삼각형 } OBC \text{ 의 넓이가} \\ \text{삼각형 } OAB \text{ 의 넓이의 } 2 \text{ 배이므로} \\ \frac{1}{2} \times \overline{OA} \times \overline{BC} &= 2 \times \frac{1}{2} \times \overline{OA} \times \overline{AB} \\ \overline{BC} &= 2\overline{AB} \text{ 이므로} \\ \overline{AC} &= \overline{AB} + \overline{BC} = 3\overline{AB} \\ \overline{AB} &= \sqrt{k}, \quad \overline{AC}=k \text{ 에서} \\ k &= 3\sqrt{k}, \quad k^2-9k=0 \\ k > 1 \text{ 이므로 } k &= 9 \\ \text{따라서 삼각형 } OBC \text{ 의 넓이는} \\ \frac{1}{2} \times \overline{OA} \times \overline{BC} &= \frac{1}{2} \times 9 \times 6 = 27 \end{aligned}$$

15. [출제의도] 복소수가 서로 같은 조건을 이해하여 조건을 만족시키는 미지수의 값을 구한다.

$$\begin{aligned} \text{복소수 } z \text{ 를 } z=a+bi \text{ (} a, b \text{ 는 실수)라 하자.} \\ \text{조건 (가)에서 } \bar{z} &= -z \text{ 이므로} \\ a-bi &= -a-bi \text{ 에서 } a=0 \\ \text{즉 } z &= bi \text{ 이다.} \\ \text{조건 (나)에 } z=bi \text{ 를 대입하면} \\ -b^2+(k^2-3k-4)bi+(k^2+2k-8) &= 0 \\ k^2+2k-8-b^2+(k^2-3k-4)bi &= 0 \\ \text{이고,} \\ k^2+2k-8-b^2 &= 0 \quad \text{㉠} \\ (k^2-3k-4)b &= 0 \quad \text{㉡} \\ \text{이다.} \\ \text{㉠에서 } b=0 \text{ 또는 } k^2-3k-4 &= 0 \\ \text{(i) } b=0 \text{ 일 때} \\ \text{㉡에서 } k^2+2k-8 &= 0 \text{ 이므로 } k=-4 \text{ 또는 } k=2 \text{ 이다.} \\ \text{(ii) } k^2-3k-4 &= 0, \text{ 즉 } k=-1 \text{ 또는 } k=4 \text{ 일 때} \\ k=-1 \text{ 이면 ㉡에서 } -9-b^2 &= 0 \text{ 이므로 이를 만족시} \\ \text{키는 실수 } b \text{ 는 존재하지 않는다.} \\ k=4 \text{ 이면 ㉡에서 } 16-b^2 &= 0 \text{ 이므로 이를 만족시키} \\ \text{는 실수 } b \text{ 는 } -4, 4 \text{ 이다.} \\ \text{(i), (ii)에서 조건을 만족시키는 실수 } k \text{ 는 } -4, 2, \\ 4 \text{ 이고 모든 실수 } k \text{ 의 값의 곱은 } -32 \text{ 이다.} \end{aligned}$$

[다른 풀이]

$f(x) = x^2 + (k^2 - 3k - 4)x + (k^2 + 2k - 8)$ 이라 하자.

조건 (나)에서 복소수 z 는 x 에 대한 이차방정식 $f(x) = 0$ 의 한 근이다.

(i) z 가 실수일 때

조건 (가)에서 $\bar{z} = -z$ 이고

z 가 실수이므로 $\bar{z} = z$ 이다.

따라서 $z = 0$

즉, 이차방정식 $f(x) = 0$ 의 한 근이 $x = 0$ 이므로

$$f(0) = 0$$

$$k^2 + 2k - 8 = 0$$

$$(k+4)(k-2) = 0$$

$$k = -4 \text{ 또는 } k = 2$$

(ii) z 가 허수일 때

x 에 대한 이차방정식

$$x^2 + (k^2 - 3k - 4)x + (k^2 + 2k - 8) = 0$$

에서 계수와 상수항이 모두 실수이므로 z 의 켤레

복소수 \bar{z} 역시 이차방정식의 한 근이다.

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$z + \bar{z} = -(k^2 - 3k - 4)$$

조건 (가)에서 $\bar{z} = -z$ 이므로

$$z + \bar{z} = 0$$

$$\text{즉, } k^2 - 3k - 4 = 0$$

$$(k-4)(k+1) = 0$$

$$k = 4 \text{ 또는 } k = -1$$

$k = 4$ 이면 $f(x) = x^2 + 16$ 이고, 이차방정식

$f(x) = 0$ 의 해는 $x = 4i$ 또는 $x = -4i$ 이다.

$k = -1$ 이면 $f(x) = x^2 - 9$ 이고, 이차방정식

$f(x) = 0$ 의 해는 $x = 3$ 또는 $x = -3$ 이므로 z 가 허수라는 조건에 모순이다.

(i), (ii)에서 조건을 만족시키는 실수 k 는 $-4, 2, 4$ 이고, 모든 실수 k 의 값의 곱은 -32 이다.

16. [출제의도] 곱셈 공식을 이용하여 식의 값을 구하는 문제를 해결한다.

삼각형 ABC가 $\angle A = 90^\circ$ 인 직각삼각형이므로

$$\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = \overline{BC}^2 \text{에서 } x^2 + y^2 = 10 \dots\dots \textcircled{1}$$

삼각형 ABC와 삼각형 APS가 서로 닮음이고 닮음비

$$\text{가 } \overline{BC} : \overline{PS} = \sqrt{10} : \frac{2\sqrt{10}}{7} = 7 : 2 \text{이므로}$$

$$\overline{AP} = \frac{2}{7}x, \overline{AS} = \frac{2}{7}y \text{이고 } \overline{SC} = \frac{5}{7}y$$

삼각형 APS와 삼각형 RSC가 서로 닮음이므로

$$\overline{PS} : \overline{AP} = \overline{SC} : \overline{RS} \text{에서}$$

$$\frac{2\sqrt{10}}{7} : \frac{2x}{7} = \frac{5y}{7} : \frac{2\sqrt{10}}{7}$$

$$10xy = 40, xy = 4 \dots\dots \textcircled{2}$$

①, ②에서

$$(x-y)^2 = x^2 + y^2 - 2xy$$

$$= 10 - 2 \times 4 = 2$$

$$x > y \text{이므로 } x - y = \sqrt{2}$$

따라서

$$x^3 - y^3 = (x-y)^3 + 3xy(x-y)$$

$$= (\sqrt{2})^3 + 3 \times 4 \times \sqrt{2}$$

$$= 14\sqrt{2}$$

[다른 풀이]

$$\overline{BQ} = \frac{\sqrt{10}}{7}a \ (0 < a < 5) \text{라 하면}$$

$$\overline{CR} = \overline{BC} - \overline{BQ} - \overline{QR}$$

$$= \sqrt{10} - \frac{\sqrt{10}}{7}a - \frac{2\sqrt{10}}{7}$$

$$= \frac{\sqrt{10}}{7}(5-a)$$

삼각형 QBP와 삼각형 RSC는 서로 닮음이므로

$$\frac{\overline{PQ}}{\overline{BQ}} = \frac{\overline{CR}}{\overline{SR}} \text{에서}$$

$$\frac{\frac{2\sqrt{10}}{7}}{\frac{\sqrt{10}}{7}a} = \frac{\frac{\sqrt{10}}{7}(5-a)}{\frac{2\sqrt{10}}{7}}, \frac{2}{a} = \frac{5-a}{2}$$

$$\text{그러므로 } \frac{2}{a} = \frac{5-a}{2} \text{에서 } a^2 - 5a + 4 = 0 \text{이고}$$

$$(a-1)(a-4) = 0, a = 1 \text{ 또는 } a = 4 \text{이다.}$$

삼각형 ABC가 $\angle A = 90^\circ$ 인 직각삼각형이므로

$$\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = \overline{BC}^2 \text{에서 } x^2 + y^2 = 10 \dots\dots \textcircled{1}$$

(i) $a = 1$ 일 때

삼각형 ABC와 삼각형 QBP는 서로 닮음이므로

$$\frac{\overline{CA}}{\overline{BA}} = \frac{\overline{PQ}}{\overline{BQ}} \text{에서 } \frac{y}{x} = 2, y = 2x$$

$x > 0, y > 0$ 이므로 $x < y$ 가 되어 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $a = 4$ 일 때

삼각형 ABC와 삼각형 QBP는 서로 닮음이므로

$$\frac{\overline{CA}}{\overline{BA}} = \frac{\overline{PQ}}{\overline{BQ}} \text{에서 } \frac{y}{x} = \frac{1}{2}, x = 2y$$

①에 대입하여 x, y 의 값을 구하면

$$(2y)^2 + y^2 = 10, y^2 = 2, x > 0, y > 0 \text{이므로}$$

$$x = 2\sqrt{2}, y = \sqrt{2}$$

$$\begin{aligned} x^3 - y^3 &= (2\sqrt{2})^3 - (\sqrt{2})^3 \\ &= 16\sqrt{2} - 2\sqrt{2} \\ &= 14\sqrt{2} \end{aligned}$$

$$(i), (ii) \text{에서 } x^3 - y^3 = 14\sqrt{2}$$

17. [출제의도] 유리함수의 그래프를 이용하여 상수의 값을 구하는 문제를 해결한다.

$P\left(a, \frac{k}{a}\right), Q\left(a+2, \frac{k}{a+2}\right)$ 이므로 조건 (가)에 의하여

$$\frac{\frac{k}{a+2} - \frac{k}{a}}{a+2-a} = -1, \frac{\frac{k}{a+2} - \frac{k}{a}}{a+2} = -2, \frac{-2k}{a(a+2)} = -2$$

$$\text{즉, } k = a(a+2)$$

$$f(a) = \frac{k}{a} = a+2, f(a+2) = \frac{k}{a+2} = a \text{이다.}$$

점 P의 좌표는 $(a, a+2)$, 점 Q의 좌표는 $(a+2, a)$

조건 (나)에 의하여 점 R의 좌표는 $(-a, -a-2)$,

점 S의 좌표는 $(-a-2, -a)$

직선 PS의 기울기는 $\frac{a+2-(-a)}{a-(-a-2)} = 1$ 이고, 직선 RS의

기울기는 $\frac{-a-(-a-2)}{-a-2-(-a)} = -1$, 직선 QR의 기울기는

$$\frac{-a-2-a}{-a-(a+2)} = 1 \text{이므로 사각형 PQRS는 직사각형이다.}$$

$$\overline{PQ} = \sqrt{(a+2-a)^2 + \{a-(a+2)\}^2} = 2\sqrt{2} \text{이고,}$$

$$\overline{PS} = \sqrt{\{-(a+2)-a\}^2 + \{-a-(a+2)\}^2} = 2\sqrt{2}(a+1)$$

사각형 PQRS의 넓이는

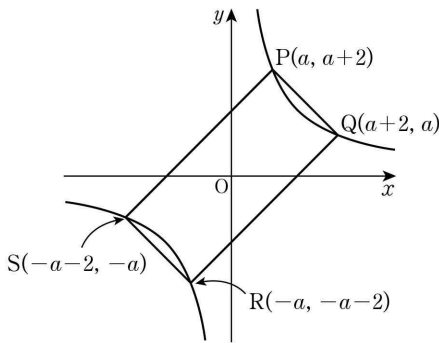
$$2\sqrt{2} \times 2\sqrt{2}(a+1) = 8(a+1) = 8\sqrt{5}$$

따라서 $a = \sqrt{5} - 1$ 이므로

$$k = a(a+2) = (\sqrt{5}-1)(\sqrt{5}+1) = 4$$

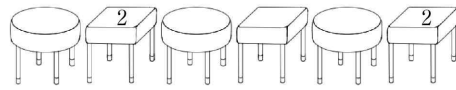
[보충 설명]

좌표평면 위의 네 점 P, Q, R, S의 위치는 다음과 같다.

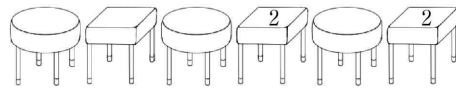


18. [출제의도] 순열을 이용하여 조건을 만족시키는 경우의 수를 구하는 문제를 해결한다.

(i) 2학년 학생이 오른쪽 끝 사각 의자에 앉을 때



또는



위와 같이 2학년 학생이 앉을 사각 의자를 선택하는 경우의 수는 2

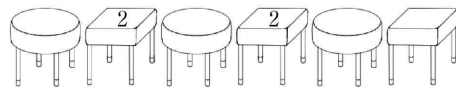
위의 각각의 경우에 대하여 2학년 학생이 두 사각 의자에 앉는 경우의 수는 ${}_2P_2 = 2!$

① 2학년 학생이 앉지 않은 사각 의자에 1학년 학생이 앉는다면 1학년 학생이 앉은 사각 의자와 이웃한 두 개의 둥근 의자에는 3학년 학생만 앉아야 하므로 경우의 수는 $2! \times 2! = 4$

② 2학년 학생이 앉지 않은 사각 의자에 3학년 학생이 앉는다면 3학년 학생이 앉은 사각 의자와 이웃한 두 개의 둥근 의자에는 1학년 학생만 앉아야 하므로 경우의 수는 $2! \times 2! = 4$

$$\text{그러므로 } 2 \times 2! \times (4+4) = 32$$

(ii) 2학년 학생이 오른쪽 끝의 사각 의자에 앉지 않을 때



오른쪽 끝이 아닌 나머지 2개의 사각 의자에 2학년 학생 2명이 앉는 경우의 수는 ${}_2P_2 = 2!$

① 오른쪽 끝의 사각 의자에 1학년 학생이 앉는다면 1학년 학생이 앉은 사각 의자와 이웃하지 않은 2개의 둥근 의자에 1학년 학생 1명이 앉아야 하므로 경우의 수는 $2 \times 2! \times 2! = 8$

② 오른쪽 끝의 사각 의자에 3학년 학생이 앉는다면 3학년 학생이 앉은 사각 의자와 이웃하지 않은 2개의 둥근 의자에 3학년 학생 1명이 앉아야 하므로 경우의 수는 $2 \times 2! \times 2! = 8$

$$\text{그러므로 } 2! \times (8+8) = 32$$

$$(i), (ii) \text{에서 구하는 경우의 수는 } 32 + 32 = 64$$

[다른 풀이]

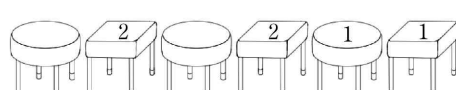
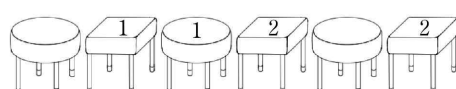
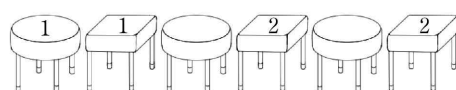
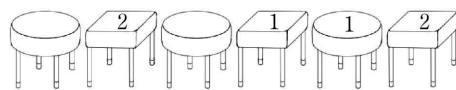
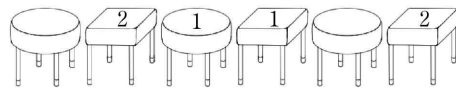
사각 의자 3개 중 2개의 의자에 2학년 학생 2명이 앉는 경우의 수는 ${}_3P_2 = 3 \times 2 = 6$

나머지 의자 4개에 1학년 학생 2명과 3학년 학생

2명이 앉는 경우의 수는 ${}_4P_4 = 4! = 24$

조건 (가)를 만족시키는 경우의 수는 $6 \times 24 = 144$

이 중 1학년 학생 2명이 서로 이웃하여 앉는 경우는 아래와 같이 다섯 가지이다.



각각의 경우 1, 2, 3학년 학생들이 앉는 경우의 수는 ${}_2P_2 \times {}_2P_2 \times {}_2P_2 = 8$

따라서 1학년 학생 2명이 서로 이웃하여 앉는 경우의 수는 $5 \times 8 = 40$

마찬가지로 3학년 학생 2명이 서로 이웃하여 앉는 경우의 수도 40

조건 (가), (나)를 모두 만족시키는 경우의 수는

$$144 - 40 \times 2 = 144 - 80 = 64$$

19. [출제의도] 원의 방정식과 접선의 방정식을 이용하여 미지수의 값을 구하는 문제를 해결한다.

두 점 A(0, 6), B(9, 0)을 2:1로 내분하는 점 P의 좌표는

$$\left(\frac{2 \times 9 + 1 \times 0}{2+1}, \frac{2 \times 0 + 1 \times 6}{2+1}\right)$$

이므로 P(6, 2)이다.

점 P(6, 2)가 원 $x^2 + y^2 - 2ax - 2by = 0$ 위의 점이므로 $6^2 + 2^2 - 2a \times 6 - 2b \times 2 = 0$

$$3a + b = 10 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

원의 중심과 점 P를 지나는 직선을 l 이라 하면, 직선 l 은 직선 AB와 서로 수직이고 직선 AB의 기울기가 $-\frac{2}{3}$ 이므로 직선 l 의 기울기는 $\frac{3}{2}$ 이다.

직선 l 이 점 P(6, 2)를 지나므로 직선 l 의 방정식은

$$y = \frac{3}{2}(x-6) + 2$$

원의 방정식 $x^2 + y^2 - 2ax - 2by = 0$ 을 정리하면

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = a^2 + b^2$$

원의 중심 (a, b) 가 직선 l 위의 점이므로

$$b = \frac{3}{2}(a-6) + 2$$

$$3a - 2b = 14 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{을 연립하면 } a = \frac{34}{9}, b = -\frac{4}{3}$$

$$\text{따라서 } a+b = \frac{34}{9} + \left(-\frac{4}{3}\right) = \frac{22}{9}$$

20. [출제의도] 합성함수를 이용하여 조건을 만족시키는 함수를 추론한다.

ㄱ. 조건 (가)에 의하여 $f(f(4)) \leq 1$ 이므로

$$f(f(4)) = 1 \text{ 이다. (참)}$$

ㄴ. (i) $f(4) = 1$ 일 때

$$f(f(4)) = f(1) = 1 \text{ 이므로 } f(1) = 1 \text{ 이다.}$$

① $f(3) = 1$ 이면 함수 f 의 치역이 $\{1, 2, 4\}$ 가 될 수 없으므로 조건 (나)를 만족시키지 않는다.

② $f(3) = 2$ 이면 함수 f 의 치역이 $\{1, 2, 4\}$ 이므로 $f(2) = 4$ 이고 $f(f(3)) = f(2) = 4 > 2$ 가 되어 조건 (가)를 만족시키지 않는다.

③ $f(3) = 4$ 이면 함수 f 의 치역이 $\{1, 2, 4\}$ 이므로 $f(2) = 2$ 이고 $f(f(1)) = f(1) = 1$, $f(f(2)) = f(2) = 2$, $f(f(3)) = f(4) = 1$ 이 되어 조건을 만족시킨다.

(ii) $f(4) = 2$ 일 때

$$f(f(4)) = f(2) = 1 \text{ 이므로 } f(2) = 1 \text{ 이다.}$$

① $f(3) = 1$ 이면 함수 f 의 치역이 $\{1, 2, 4\}$ 이므로 $f(1) = 4$ 이고 $f(f(2)) = f(1) = 4 > 3$ 이 되어 조건 (가)를 만족시키지 않는다.

② $f(3) = 2$ 이면 함수 f 의 치역이 $\{1, 2, 4\}$ 이므로 $f(1) = 4$ 이고 $f(f(2)) = f(1) = 4 > 3$ 이 되어 조건 (가)를 만족시키지 않는다.

③ $f(3) = 4$ 일 때 $f(1) = 1$ 이면 $f(f(1)) = f(1) = 1$, $f(f(2)) = f(1) = 1$, $f(f(3)) = f(4) = 2$ 가 되어 조건을 만족시킨다. $f(1) = 2$ 이면 $f(f(1)) = f(2) = 1$, $f(f(2)) = f(1) = 2$, $f(f(3)) = f(4) = 2$ 가 되어 조건을 만족시킨다. $f(1) = 4$ 이면 $f(f(2)) = f(1) = 4 > 3$ 이 되어 조건 (가)를 만족시키지 않는다.

(iii) $f(4) = 4$ 일 때

$$f(f(4)) = f(4) = 4 \neq 1 \text{ 이므로 조건 (가)를 만족시키지 않는다.}$$

(i), (ii), (iii)에서 가능한 모든 함수 f 에 대해

여 $f(3) = 4$ 이다. (참)

ㄷ. (i), (ii), (iii)에서 가능한 함수 f 의 개수는 3이다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

21. [출제의도] 원과 직선의 위치 관계를 이용하여 조건을 만족시키는 선분의 길이를 추론한다.

원의 중심을 A(a, b)라 하면 점 A와 직선

$$l_1: mx - y = 0 \text{ 사이의 거리는 } \frac{|ma - b|}{\sqrt{m^2 + 1}}$$

$$\text{점 A와 직선 } l_2: x - my = 0 \text{ 사이의 거리는 } \frac{|a - mb|}{\sqrt{1 + m^2}}$$

이므로

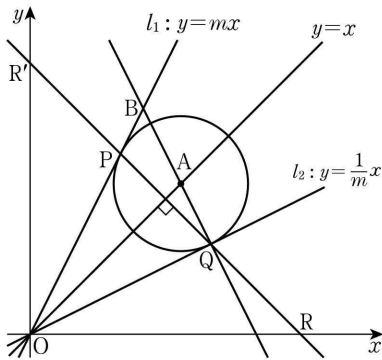
$$\frac{|ma - b|}{\sqrt{m^2 + 1}} = \frac{|a - mb|}{\sqrt{1 + m^2}}, \quad |ma - b| = |a - mb|$$

즉, $ma - b = \pm(a - mb)$ 이므로 $a = b$ 또는 $a = -b$

원의 중심이 제1사분면에 있으므로 $a = b$

그러므로 직선 OA의 방정식은 $y = x$ 이다.

삼각형 OPQ가 $\overline{OP} = \overline{OQ}$ 인 이등변삼각형이므로 선분 PQ의 수직이등분선은 점 O를 지나고, 현의 성질에 의해 선분 PQ의 수직이등분선은 원의 중심 A를 지난다. 즉, 직선 $y = x$ 은 선분 PQ의 수직이등분선이다. 직선 PQ의 기울기는 -1 이므로 직선 PQ가 y 축과 만나는 점을 R'이라 하면 $\overline{OR} = \overline{OR'}$ 이고 $\angle OR'P = \angle ORQ = 45^\circ$ 이다.



삼각형 OPQ가 이등변삼각형이므로

$$\angle OPQ = \angle OQP \text{ 에서 } \angle OPR' = \angle OQR \text{ 이다.}$$

$\overline{OR'} = \overline{OR}$, $\angle PR'O = \angle QRO$, $\angle OPR' = \angle OQR$ 에서 삼각형 OPR'과 삼각형 OQR은 서로 합동이다.

따라서 $\overline{R'P} = \overline{PQ} = \overline{QR}$ 이므로 세 삼각형 OR'P, OPQ, OQR의 넓이는 모두 24로 같다.

그러므로 삼각형 ORR'의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times \overline{OR} \times \overline{OR'} = \frac{1}{2} \times \overline{OR}^2 = 3 \times 24 = 72$$

$$\overline{OR} = 12$$

따라서 R(12, 0), R'(0, 12)이다.

두 점 P, Q는 선분 RR'의 삼등분점이고

선분 RR'을 2:1로 내분하는 점 P의 좌표는

$$\left(\frac{2 \times 0 + 1 \times 12}{2+1}, \frac{2 \times 12 + 1 \times 0}{2+1}\right),$$

선분 RR'을 1:2로 내분하는 점 Q의 좌표는

$$\left(\frac{1 \times 0 + 2 \times 12}{1+2}, \frac{1 \times 12 + 2 \times 0}{1+2}\right)$$

이므로 P(4, 8), Q(8, 4)이다.

$$\text{직선 } l_1 \text{의 기울기 } m \text{은 } m = \frac{8-0}{4-0} = 2 \text{ 이다.}$$

따라서 직선 l_1 의 방정식은 $y = 2x$, 직선 l_2 의 방정식은 $y = \frac{1}{2}x$ 이다.

직선 BQ는 직선 l_2 와 수직이므로 기울기가 -2 이고 점 Q(8, 4)를 지난다. 따라서 직선 BQ의 방정식은 $y = -2x + 20$ 이다.

직선 l_1 과 직선 BQ의 교점 B의 x 좌표는

$$2x = -2x + 20 \text{ 에서 } 4x = 20, x = 5$$

이므로 B(5, 10)이다.

$$\begin{aligned} \text{따라서 } \overline{BQ} &= \sqrt{(8-5)^2 + (4-10)^2} \\ &= \sqrt{45} \\ &= 3\sqrt{5} \end{aligned}$$

[다른 풀이]

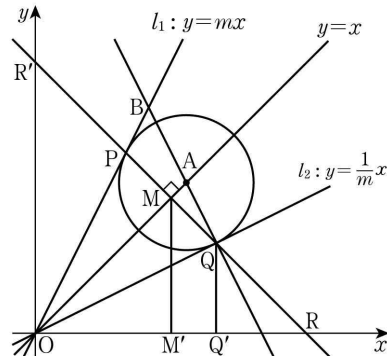
선분 PQ의 중점을 M이라 하고 $\overline{PM} = \overline{MQ} = k (k > 0)$ 이라 하자.

$$\overline{PQ} = \overline{QR} = 2k \text{ 이므로 } \overline{OM} = \overline{MR} = 3k$$

조건 (나)로부터 삼각형 OPQ의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times 2k \times 3k = 3k^2 = 24 \text{ 이므로 } k = 2\sqrt{2}$$

두 점 M, Q에서 x 축에 내린 수선의 발을 각각 M', Q'이라 하자.



$$\begin{aligned} \overline{OQ'} &= \overline{OM'} + \overline{M'Q'} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\overline{OM} + \frac{1}{\sqrt{2}}\overline{MQ} \\ &= \frac{3}{\sqrt{2}}k + \frac{1}{\sqrt{2}}k \\ &= \frac{4}{\sqrt{2}}k = 8 \\ \overline{QQ'} &= \frac{1}{\sqrt{2}}\overline{QR} \\ &= \frac{2}{\sqrt{2}}k = 4 \end{aligned}$$

이므로 Q(8, 4)이고 직선 OQ의 기울기 $\frac{1}{m}$ 은

$$\frac{1}{m} = \frac{4-0}{8-0} = \frac{1}{2} \text{ 이므로 } m = 2$$

따라서 직선 l_1 의 방정식은 $y = 2x$, 직선 l_2 의 방정식은

$$y = \frac{1}{2}x \text{ 이다.}$$

직선 BQ는 직선 l_2 와 수직이므로 기울기가 -2 이고 점 Q(8, 4)를 지난다. 따라서 직선 BQ의 방정식은 $y = -2x + 20$ 이다.

직선 l_1 과 직선 BQ의 교점 B의 x 좌표는

$$2x = -2x + 20 \text{ 에서}$$

$$4x = 20$$

$$x = 5$$

이므로 B(5, 10)이다.

$$\text{따라서 } \overline{BQ} = \sqrt{(8-5)^2 + (4-10)^2} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$$

22. [출제의도] 집합의 연산을 이용하여 원소의 합을 계산한다.

$$A - B = \{8, 12\} \text{ 이므로 모든 원소의 합은 } 20$$

23. [출제의도] 선분의 외분을 이용하여 점의 좌표를 계산한다.

선분 AB를 2:1로 외분하는 점의 좌표는

$$\left(\frac{2 \times 7 - 1 \times 3}{2-1}, \frac{2 \times 11 - 1 \times 3}{2-1}\right)$$

즉, (11, 19)에서 $a = 11$, $b = 19$ 이므로

$$a + b = 30$$

24. [출제의도] 이차함수의 그래프와 직선의 위치 관계를 이해하여 미지수의 최솟값을 구한다.

직선 $y = -x + k$ 가 이차함수 $y = x^2 - 2x + 6$ 의 그래프와 만나므로 이차방정식 $x^2 - 2x + 6 = -x + k$ 가 실근을 가져야 한다.

이차방정식 $x^2 - x + 6 - k = 0$ 의 판별식을 D 라 할 때,

$$D = (-1)^2 - 4 \times (6 - k) = -23 + 4k \geq 0$$

$$k \geq \frac{23}{4}$$

따라서 자연수 k 의 최솟값은 6

25. [출제의도] 도형의 평행이동을 이해하여 직선의 y 절편을 구한다.

점 A(3, -1)을 x 축의 방향으로 1만큼, y 축의 방향으로 -4만큼 평행이동한 점 B의 좌표는

(3+1, -1-4), 즉 (4, -5)

직선 AB의 기울기가

$\frac{-5-(-1)}{4-3}=-4$ 이므로 직선 AB의 방정식은

$y-(-5)=-4(x-4)$, 즉 $y=-4x+11$

이 직선을 x 축의 방향으로 3만큼, y 축의 방향으로 1만큼 평행이동한 직선의 방정식은

$y-1=-4(x-3)+11$, 즉 $y=-4x+24$ 이다.

$y=-4x+24$ 에 $x=0$ 을 대입하면 $y=24$ 이므로

y 절편은 24

26. [출제의도] 명제의 참, 거짓을 이용하여 미지수의 값을 추론한다.

두 조건 p, q 의 진리집합을 각각 P, Q 라 하자.

명제 $p \rightarrow \sim q$ 가 참이므로 $P \subset Q^C$ 에서 $Q \subset P^C$ 이다.

명제 $\sim p \rightarrow q$ 가 참이므로 $P^C \subset Q$ 이다.

그러므로 $Q=P^C$ 이다.

$p: 2x-a=0$ 에서 $P=\left\{\frac{a}{2}\right\}$ 이고,

$Q=P^C$ 에서

$Q=\left\{x \mid x \neq \frac{a}{2} \text{인 실수}\right\}$ 이다.

즉, 부등식 $x^2-bx+9>0$ 의 해가 $x \neq \frac{a}{2}$ 인 모든 실수

이므로 이차함수 $y=x^2-bx+9$ 의 그래프는 x 축에 접해야 한다. 따라서 이차방정식 $x^2-bx+9=0$ 의 판별식을 D 라 할 때

$D=(-b)^2-4 \times 1 \times 9=0$ 이다.

즉, $b^2=36$ 이므로 양수 b 의 값은 6이다.

조건 $q: x^2-6x+9>0$ 에서

$Q=\{x \mid x \neq 3 \text{인 실수}\}$ 이고 $\frac{a}{2}=3, a=6$ 이다.

따라서 $a+b=6+6=12$

27. [출제의도] 조합을 이용하여 조건을 만족시키는 함수의 개수를 구하는 문제를 해결한다.

조건 (가)에 의하여 집합 X 의 6개의 원소 중에서 서로 다른 4개의 원소를 선택하면 $f(1), f(2), f(3), f(4)$ 의 값이 정해진다.

즉, $f(1), f(2), f(3), f(4)$ 의 값을 선택하는 경우의 수는 ${}_6C_4={}_6C_2=\frac{6 \times 5}{2 \times 1}=15$

조건 (나)에 의하여 함수 f 는 일대일대응이 아니다.

(i) $f(5)$ 의 값이 $f(1), f(2), f(3), f(4)$ 의 값 중 하나의 값과 같을 때

$f(6)$ 의 값은 집합 X 의 6개의 원소 중 임의의 값이 될 수 있으므로 $f(5), f(6)$ 의 값을 선택하는 경우의 수는 ${}_4C_1 \times {}_6C_1=24$

(ii) $f(5)$ 의 값이 $f(1), f(2), f(3), f(4)$ 의 값과 다를 때

$f(6)$ 의 값은 $f(1), f(2), f(3), f(4), f(5)$ 의 값 중 하나의 값이 되어야 하므로 $f(5), f(6)$ 의 값을 선택하는 경우의 수는 ${}_2C_1 \times {}_5C_1=10$

(i), (ii)에서 구하는 함수의 개수는

$15 \times (24+10)=510$

[다른 풀이]

조건 (가)에 의하여 집합 X 의 6개의 원소 중에서 서로 다른 4개의 원소를 선택하면 $f(1), f(2), f(3), f(4)$ 의 값이 정해진다.

즉, $f(1), f(2), f(3), f(4)$ 의 값을 선택하는 경우의 수는

${}_6C_4={}_6C_2=\frac{6 \times 5}{2 \times 1}=15$

조건 (나)에 의하여 함수 f 는 $f(1), f(2), f(3), f(4), f(5), f(6)$ 중에서 적어도 두 개의 함수값이 같아야

한다. $f(5), f(6)$ 의 값으로 집합 X 의 6개의 원소 중 임의의 값을 선택하는 경우 중에서 $f(1), f(2), f(3), f(4)$ 의 값이 아닌 나머지 2개의 원소를 각각 $f(5), f(6)$ 의 값으로 선택하는 경우를 제외하여야 하므로 그 경우의 수는

$6 \times 6-{}_2P_2=34$

따라서 구하는 함수의 개수는

$15 \times 34=510$

28. [출제의도] 주어진 조건을 만족시키는 집합을 추론한다.

$n(A) \times n((A \cup B)^C)=15$ 에서 $n(A)$ 는 15의 양의 약수이다.

(i) $n(A)=1$ 일 때

$A=\{2\}$ 이므로 $k=2$ 또는 $k=3$

$k=2$ 이면 $U=\{1, 2\}, B=\{1, 2\}$ 에서

$(A \cup B)^C=\emptyset, n((A \cup B)^C)=0$ 이므로 조건을 만족시키지 않는다.

$k=3$ 이면 $U=\{1, 2, 3\}, B=\{1, 3\}$ 에서

$(A \cup B)^C=\emptyset, n((A \cup B)^C)=0$ 이므로 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $n(A)=3$ 일 때

$A=\{2, 4, 6\}$ 이므로 $k=6$ 또는 $k=7$

$k=6$ 이면 $U=\{1, 2, 3, \dots, 6\}, B=\{1, 2, 3, 6\}$ 에서

$(A \cup B)^C=\{5\}, n((A \cup B)^C)=1$ 이므로 조건을 만족시키지 않는다.

$k=7$ 이면 $U=\{1, 2, 3, \dots, 7\}, B=\{1, 7\}$ 에서

$(A \cup B)^C=\{3, 5\}, n((A \cup B)^C)=2$ 이므로 조건을 만족시키지 않는다.

(iii) $n(A)=5$ 일 때

$A=\{2, 4, 6, 8, 10\}$ 이므로 $k=10$ 또는 $k=11$

$k=10$ 이면

$U=\{1, 2, 3, \dots, 10\}, B=\{1, 2, 5, 10\}$ 에서

$(A \cup B)^C=\{3, 7, 9\}, n((A \cup B)^C)=3$ 이므로 조건을 만족시킨다.

$k=11$ 이면 $U=\{1, 2, 3, \dots, 11\}, B=\{1, 11\}$ 에서

$(A \cup B)^C=\{3, 5, 7, 9\}, n((A \cup B)^C)=4$ 이므로 조건을 만족시키지 않는다.

(iv) $n(A)=15$ 일 때

$A=\{2, 4, 6, \dots, 30\}$ 이므로 $k=30$ 또는 $k=31$

$k=30$ 이면 $U=\{1, 2, 3, \dots, 30\},$

$B=\{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}$ 에서

$(A \cup B)^C=\{7, 9, 11, 13, 17, 19, 21, 23, 25, 27, 29\},$

$n((A \cup B)^C)=11$ 이므로 조건을 만족시키지 않는다.

$k=31$ 이면 $U=\{1, 2, 3, \dots, 31\}, B=\{1, 31\}$ 에서

$(A \cup B)^C=\{3, 5, 7, \dots, 29\}, n((A \cup B)^C)=14$ 이므로 조건을 만족시키지 않는다.

(i)~(iv)에서 두 집합 A, B 가 조건을 만족시키도록 하는 k 는 $k=10$ 이고

$U=\{1, 2, 3, \dots, 10\}, A=\{2, 4, 6, 8, 10\},$

$B=\{1, 2, 5, 10\}, (A \cup B)^C=\{3, 7, 9\}$ 이므로

집합 $(A \cup B)^C=\{3, 7, 9\}$ 의 모든 원소의 곱은

$3 \times 7 \times 9=189$

29. [출제의도] 다항식의 나눗셈과 항등식을 이용하여 미지수의 값을 구하는 문제를 해결한다.

조건 (가)에 의하여 다항식 $f(x)$ 는 계수와 상수항이 모두 실수인 일차식을 인수로 갖지 않으므로 계수와 상수항이 모두 실수인 삼차식도 인수로 갖지 않는다.

조건 (나)에서 $h(x)$ 를 $g(x)$ 로 나눈 나머지가 일차식이므로 $g(x)$ 는 차수가 2 이상인 다항식이고 $h(x)$ 는 차수가 1 이상인 다항식이다. 두 다항식 $g(x)$ 와 $h(x)$ 는 다항식 $f(x)$ 의 인수이므로, 두 다항식 $g(x)$ 와 $h(x)$ 의 차수는 2 또는 4이다.

다항식 $h(x)$ 의 최고차항의 계수가 1이므로 다항식 $h(x)$ 의 차수가 4이면 $h(x)=f(x)$ 이다. 그러므로 조건 (나)를 만족시키지 않는다.

따라서 다항식 $h(x)$ 의 차수는 2이다.

다항식 $g(x)$ 의 차수가 4이면, 다항식 $h(x)$ 를 $g(x)$ 로 나눈 나머지가 $h(x)$ 이므로, 조건 (나)를 만족시키지 않는다.

따라서 두 다항식 $g(x)$ 와 $h(x)$ 는 각각 최고차항의 계수가 1인 일차식이고, 조건 (나)에 의하여 $h(x)=g(x)-4x-1$ 이다.

그러므로 $g(x) \neq h(x)$ 이고 복소수 k 에 대하여 $g(x)$ 와 $h(x)$ 가 일차식 $x-k$ 를 공통인수로 가지면

$g(k)=h(k)=0$ 이고 $h(k)=g(k)-4k-1$ 에서 $k=-\frac{1}{4}$ 이

다. 이때 $x=-\frac{1}{4}$ 은 방정식 $f(x)=0$ 의 실근이 되어

조건 (가)를 만족시키지 않는다. 따라서 $g(x)$ 와 $h(x)$ 는 차수가 1 이상인 다항식을 공통인수로 갖지 않고 $f(x)=g(x)h(x)$ 이다.

$g(x)=x^2+px+q$ 라 하자. (단, p, q 는 실수)

$h(x)=g(x)-4x-1=x^2+px-4x+q-1$

$f(x)=g(x)h(x)$ 에서

$x^4+(a+2)x^3+bx^2+ax+6$

$=(x^2+px+q)(x^2+px-4x+q-1)$

양변의 상수항을 비교하면

$6=q^2-q$ 에서 $q^2-q-6=(q+2)(q-3)=0$

$q=-2$ 또는 $q=3$

그런데 $q=-2$ 이면 이차방정식

$g(x)=x^2+px-2=0$ 의 판별식을 D 라 할 때,

$D=p^2+8 \geq 0$ 이므로 $g(x)=0$ 은 실근을 갖고, 방정식

$f(x)=g(x)h(x)=0$ 은 실근을 갖게 되어

조건 (가)를 만족시키지 않는다.

따라서 $q=3$ 이고

$g(x)=x^2+px+3, h(x)=x^2+px-4x+2$

$f(x)=g(x)h(x)=(x^2+px+3)(x^2+px-4x+2)$ 에서

$x^4+(a+2)x^3+bx^2+ax+6$

$=x^4+(2p-4)x^3+(p^2-4p+5)x^2+(5p-12)x+6$

양변의 계수를 비교하면

$2p-4=a+2, 5p-12=a$

$2p-6=5p-12$ 에서 $p=2$ 이고

$g(x)=x^2+2x+3, h(x)=x^2-2x+2$ 이다.

이차방정식 $g(x)=x^2+2x+3=0$ 의 판별식을 D_1 이라

할 때, $\frac{D_1}{4}=1^2-3=-2<0$ 이므로

이차방정식 $g(x)=0$ 은 실근을 갖지 않는다.

이차방정식 $h(x)=x^2-2x+2=0$ 의 판별식을 D_2 라 할

때, $\frac{D_2}{4}=(-1)^2-2=-1<0$ 이므로

이차방정식 $h(x)=0$ 은 실근을 갖지 않는다.

그러므로 방정식 $f(x)=g(x)h(x)=0$ 은 실근을 갖지 않고, 두 다항식 $g(x)=x^2+2x+3, h(x)=x^2-2x+2$ 는 조건을 만족시킨다.

따라서 $a=5p-12=-2, b=p^2-4p+5=1$

$a^2+b^2=(-2)^2+1^2=5$

30. [출제의도] 무리함수의 그래프를 이용하여 함수값을 구하는 문제를 해결한다.

(i) $b \leq 0$ 일 때

$$g(x)=\begin{cases} \sqrt{-x+a} & (x \leq a) \\ -\sqrt{x-a} & (x > a) \end{cases}$$

이므로 함수 $y=g(x)$ 의 그래프는 다음과 같다.

